高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：94.03.10					
範圍	1-3 曲線	班級	普二　　班	姓名	
		座號			

一. 選擇題 (每題 10 分)

1、(D) 坐標平面上有一雙曲線，已知共軛軸為 $x+1=0$，有一頂點為$(-4,-1)$，有一焦點為$(4,-1)$，則雙曲線的共軛軸長為 (A) $2\sqrt{7}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C)6 (D)8 (E)10

解析：共軛軸 $x=-1$，頂點為$(-4,-1)$ $\therefore$貫軸為 $y=-1$，中心為$(-1,-1)$，$a=3$

焦點$(4,-1)$ $\therefore c=5$，$b=\sqrt{c^2-a^2}=4$ $\therefore$共軛軸長 $\dfrac{2b^2}{a}=8$

2、(B) 雙曲線 $\dfrac{y^2}{k}-\dfrac{x^2}{4}=1$ 上任一點到二漸近線距離之乘積為 $\dfrac{12}{5}$，則 $k=$

(A)7 (B)6 (C)5 (D)3 (E)1

解析：雙曲線上任一點到二漸近線距離之乘積為 $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ $\therefore \dfrac{4k}{4+k}=\dfrac{12}{5}$ $\therefore k=6$

3、(C) 設 k 為一實數，若方程式 $y^2-2ky-kx^2-4x+6=0$ 之圖形為貫軸與 x 軸平行之雙曲線，則 k 之範圍為 (A) $k>1+\sqrt{3}$ (B) $0<k<1+\sqrt{3}$ (C) $1-\sqrt{3}<k<1+\sqrt{3}$（但 $k\neq 0$）(D) $1-\sqrt{3}<k<1+\sqrt{3}$（但 $k\neq 0$）或 $k<-2$ (E) $k>1+\sqrt{3}$ 或 $-2<k<1-\sqrt{3}$

解析：$y^2-2ky-kx^2-4x+6=0$，$(y-k)^2-k(x+\dfrac{2}{k})^2=k^2-\dfrac{4}{k}-6$

貫軸平行 x 軸 $\therefore \dfrac{-k}{k^2-\frac{4}{k}-6}>0$，$k^2-\dfrac{4}{k}-6<0$ $\therefore k>0$

$\therefore k^3-6k-4<0$，$(k+2)(k^2-2k-2)<0$，

$\therefore k<-2$ 或 $1-\sqrt{3}<k<1+\sqrt{3}$，$\Rightarrow 0<k<1+\sqrt{3}$

4、(C) 一雙曲線的二頂點為$(0,3)$，$(0,-1)$，一漸近線之斜率為 $\dfrac{4}{3}$，則其方程式為

(A) $\dfrac{(y-1)^2}{4}-\dfrac{x^2}{3}=1$ (B) $\dfrac{4(y-1)^2}{9}-\dfrac{4x^2}{16}=1$ (C) $\dfrac{4(y-1)^2}{16}-\dfrac{4x^2}{9}=1$

(D) $\dfrac{4x^2}{9}-\dfrac{4(y-1)^2}{16}=1$ (E) $\dfrac{4x^2}{16}-\dfrac{4(y-1)^2}{9}=1$

解析：雙曲線的中心為$(0,1)$，$a=2$，且貫軸平行 y 軸，$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{4}{3}$

$b=\dfrac{3}{2}$，$\therefore$雙曲線為 $\dfrac{(y-1)^2}{4}-\dfrac{x^2}{\frac{9}{4}}=1$

二、填充題 (每題 10 分)

5、以 $y=2x, y=-2x$ 為漸近線，且焦點是$(4, 0)$的雙曲線方程式為__________。

答案：$\dfrac{5x^2}{16}-\dfrac{5y^2}{64}=1$

解析：令方程式為 $(y-2x)(y+2x)=k$ 且圖形為橫雙曲線（$\because$焦點為$(4, 0)$）

$\therefore 4x^2-y^2=-k \Rightarrow \dfrac{x^2}{(-\frac{k}{4})}-\dfrac{y^2}{(-k)}=1$，$\therefore c=4=\sqrt{(-\dfrac{k}{4})+(-k)} \Rightarrow k=\dfrac{-64}{5}$

$\therefore$方程式為 $\dfrac{5x^2}{16}-\dfrac{5y^2}{64}=1$。

6、雙曲線$\Gamma:(3x-4y+5)(2x+y-4)=10\sqrt{5}$上任一點到它的兩漸近線的距離之積為______，又Γ的共軛雙曲線方程式為______。

答案：$2,\ (3x-4y+5)(2x+y-4)=-10\sqrt{5}$

解析：$P(x,y)$在雙曲線上，其到兩漸近線的距離之積$=\dfrac{|3x-4y+5|\times|2x+y-4|}{5\times\sqrt{5}}=\dfrac{10\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}=2$

Γ之共軛雙曲線為$(3x-4y+5)(2x+y-4)=-10\sqrt{5}$

解析：設雙曲線為$(2x+y+5)(2x-y+7)=k$，代入$(10,25)\Rightarrow(2x+y+5)(2x-y+7)=100$

7、設橢圓$\dfrac{x^2}{k^2+5}+\dfrac{y^2}{7-k}=1$與雙曲線$\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{4}=1$共焦點，則$k=$______或______。

答案：3, –4

解析：兩錐線共焦點 $\therefore c^2=(k^2+5)-(7-k)=6+4 \quad \therefore k=3$或 –4

8、若$\Gamma:\dfrac{(x+2)^2}{k-25}+\dfrac{(y-1)^2}{k-9}=1$表一雙曲線，則(1) k的範圍為______。(2)兩焦點坐標為______。

答案：$9<k<25$；(2, 5)，(2, 3)

9、二焦點為$(-2,-2),(8,-2)$，一漸近線斜率為$-\dfrac{3}{4}$的雙曲線方程式為__________。

答案：$\dfrac{(x-3)^2}{16}-\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$

解析：中心$(\dfrac{-2+8}{2},\dfrac{-2-2}{2})=(3,-2),\ \ 2c=10,\ \therefore c=5$且為橫雙曲線為$\dfrac{(x-3)^2}{a^2}-\dfrac{(y+2)^2}{b^2}=1$

$\therefore$其一條漸近線斜率$=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{3}{4}\Rightarrow a:b=4:3$

令$a=4k,\ b=3k,\ \therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=5k=5$，$k=1, a=4, b=3$

$\therefore$方程式為 $\dfrac{(x-3)^2}{16}-\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$。

10、一雙曲線之兩焦點為(–2,–1)與(4,1)，則其共軛雙曲線的兩焦點為______和______。

答案：(2,–3), (0,3)

解析：雙曲線兩焦點為 F(–2,–1)，F′(4,1)，中心為(1,0)，其$c=\sqrt{10}$，共軛雙曲線的$c=\sqrt{10}$，且其焦點連線與$\overline{FF'}$垂直，故其焦點為$(1,0)\pm\sqrt{10}(\dfrac{1}{\sqrt{10}},\dfrac{-3}{\sqrt{10}})=(2,-3)$和(0,3)

11、設一雙曲線的兩漸近線為$3x-4y-17=0,\ 3x+4y-1=0$且有一焦點坐標為$(8,-2)$，則此雙曲線正焦弦的長是______。

答案：$\dfrac{9}{2}$

解析：雙曲線方程式為$(3x-4y-17)(3x+4y-1)=k$

$\therefore 9x^2-16y^2-54x-64y+17=k\Rightarrow\dfrac{(x-3)^2}{\frac{k}{9}}-\dfrac{(y+2)^2}{\frac{k}{16}}=1$，$\therefore c=\sqrt{\dfrac{k}{9}+\dfrac{k}{16}}$

$\therefore 8-3=\sqrt{\dfrac{k}{9}+\dfrac{k}{16}}\Rightarrow\dfrac{k}{9}+\dfrac{k}{16}=25\Rightarrow k=144$，$\therefore a^2=16,\ a=4,\ b^2=9,\ b=3$

$\therefore$正焦弦長$=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{9}{2}$。

12、與橢圓$\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{3}=1$共焦點的等軸雙曲線方程式爲__________。

答案：$\dfrac{(x-2)^2}{3}-\dfrac{(y+1)^2}{3}=1$

解析：$\because$共焦點，$\therefore$共中心且共方向，$c=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$，且$a=b,$

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6}\Rightarrow 6=2a^2,\ a^2=3=b^2$，$\therefore$方程式爲 $\dfrac{(x-2)^2}{3}-\dfrac{(y+1)^2}{3}=1$。

13、設圓$C_1:(x+1)^2+y^2=9$，圓$C_2:(x-5)^2+y^2=1$，現在有一動圓與圓C_1與圓C_2同時外切或同時內切，則此動圓之圓心軌跡方程式爲______。

答案：$\dfrac{(x-2)^2}{1}-\dfrac{y^2}{8}=1$

解析：設動圓 C 半徑爲 r，圓心爲 P，$F'(-1,0)$，$F(5,0)$

$\Rightarrow$若動圓 C 與兩圓同時外切，則$\overline{PF}=r+1$，$\overline{PF'}=r+3$，$\therefore\overline{PF'}-\overline{PF}=2$，

$\Rightarrow$若動圓 C 與兩圓同時內切，則$\overline{PF}=r-1$，$\overline{PF'}=r-3$，$\therefore\overline{PF}-\overline{PF'}=2$

$\Rightarrow\left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right|=2<\overline{FF'}=6$　圖形爲雙曲線

且$c=3$，$a=1$，中心$(2,0)$，$b=2\sqrt{2}$，$\therefore$圓心軌跡爲$\dfrac{(x-2)^2}{1}-\dfrac{y^2}{8}=1$

14、已知雙曲線的焦點爲(1,4)，又漸近線爲$4x+3y=1$和$4x-3y=7$，則雙曲線方程式爲__________。

答案：$-\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$

解析：設雙曲線爲$(4x+3y-1)(4x-3y-7)=-k\ (k>0)$，(因爲焦點爲(1,4)於異號區)

且中心爲(1,–1)$\Rightarrow[4(x-1)+3(y+1)][4(x-1)-3(y+1)]=-k$

$16(x-1)^2-9(y+1)^2=-k\Rightarrow-\dfrac{(x-1)^2}{\frac{k}{16}}+\dfrac{(y+1)^2}{\frac{k}{9}}=1$　　$\therefore a^2=\dfrac{k}{9}$，$b^2=\dfrac{k}{16}$，$c^2=\dfrac{25k}{144}$

$\because$焦點爲(1,4)　$\therefore c=5$　$\therefore k=144,\ a=4,\ b=3$ $\therefore$雙曲線爲$-\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$

15、設雙曲線$x^2-y^2+2x+6y-10=0$與$x^2-y^2+2x+6y+k=0$互爲共軛雙曲線，則$k=$______。

答案：–6

解析：$(x+1)^2-(y-3)^2=2$其共軛雙曲線爲$(x+1)^2-(y-3)^2=-2$

$\Rightarrow x^2-y^2+2x+6y-6=0$　　$\therefore k=-6$

16、設 P 爲雙曲線$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$上任一點，過 P 作二漸近線的平行線，則此二直線與二漸近線所圍成的平行四邊形面積爲何？______________

答案：設$P(4\sec\theta,3\tan\theta)$，二漸近線爲$3x\pm4y=0$

過 P 點與 $3x+4y=0$ 平行之直線為 $3x+4y=12(\sec\theta+\tan\theta)$

$\begin{cases}3x+4y=12\sec\theta+12\tan\theta \\ 3x-4y=0\end{cases}$ ∴交點為 $R(2\sec\theta+2\tan\theta, \frac{3}{2}\sec\theta+\frac{3}{2}\tan\theta)$

∴平行四邊形面積 $=2\triangle OPR$ 面積（O 為中心）

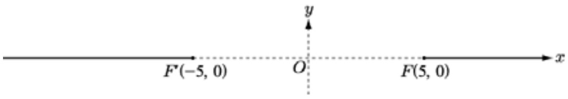
$$=\left\|\begin{matrix}2(\sec\theta+\tan\theta) & \frac{3}{2}(\sec\theta+\tan\theta) \\ 4\sec\theta & 3\tan\theta\end{matrix}\right\|=\left|6(\tan^2\theta-\sec^2\theta)\right|=6$$

17、在坐標平面上，給予兩定點 $F(5,\ 0),\ F'(-5,\ 0)$，試求

(1)滿足 $\left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right|=10$ 的所有 P 點所成的圖形是什麼？＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿；

(2)滿足 $\left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right|=12$ 的所有 P 點所成的圖形又是什麼？＿＿＿＿＿＿＿＿＿；

答案：(1)因 $F(5, 0)$，$F'(-5, 0)$的距離是 10，所以滿足 $\left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right|$ 剛好是 10 的所有 P 點所成的圖形是「將過 $F,\ F'$ 兩點的直線去掉 $F,\ F'$ 之間的點」所成的圖形，即以 $F,\ F'$ 為端點之相反二射線，如下所示：



(2)沒有任何一點可滿足 $\left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right|=12>10$，所以後者的圖形是不存在的。

18、設 P 為雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任一點，過 P 作貫軸之垂線交二漸近線於 Q、R 二點，則 $\overline{PQ}\cdot\overline{PR}$ 為一定值，求出此定值。＿＿＿＿＿＿

答案：設 $P(a\sec\theta, b\tan\theta)$，二漸近線為 $bx\pm ay=0$

∴二交點 $Q(a\sec\theta, -b\sec\theta)$，$R(a\sec\theta, b\sec\theta)$

∴ $\overline{PQ}\cdot\overline{PR}=\left|(b\tan\theta+b\sec\theta)(b\tan\theta-b\sec\theta)\right|=b^2$

19、點(0,2)與雙曲線 $x^2-4y^2=4$ 圖形上諸點之距離最小值為何？＿＿＿＿＿＿；又距離最小時，雙曲線上的點坐標為何？＿＿＿＿＿＿＿

答案：設雙曲線 $x^2-4y^2=4$ 上任一點為 $(2\sec\theta, \tan\theta)$，

距離 $(2\sec\theta-0)^2+(\tan\theta-2)^2=4\sec^2\theta+\tan^2\theta-4\tan\theta+4$

$$=5\tan^2\theta-4\tan\theta+8=5(\tan\theta-\frac{2}{5})^2+\frac{36}{5}\geq\frac{36}{5}$$

∴最小距離為 $\sqrt{\frac{36}{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，此時 $\tan\theta=\frac{2}{5}$，$\sec\theta=\frac{\sqrt{29}}{5}$，故最近點坐標為 $(\frac{2\sqrt{29}}{5}, \frac{2}{5})$