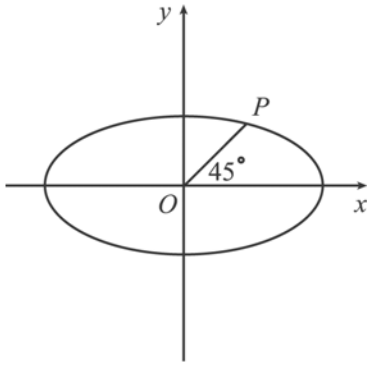
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：94.03.03					
範圍	1-2,3 橢圓&雙曲線	班級	普二　　班	姓名	
		座號			

一. 選擇題 (每題 10 分)

1、(B) 在坐標平面上有一橢圓，它的長軸落在 x 軸上，短軸落在 y 軸上，長軸、短軸的長度分別爲 4、2。如圖所示，通過橢圓的中心 O 且與 x 軸夾角爲 45 度的直線在第一象限跟橢圓相交於 P。則此交點 P 與中心 O 的距離爲 (A)1.5 (B)$\sqrt{1.6}$ (C)$\sqrt{2}$ (D)$\sqrt{2.5}$ (E)$\sqrt{3.2}$



解析：橢圓方程式：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1\cdots①$

直線 OP 方程式 $y=x$ 代入①$\Rightarrow \dfrac{x^2}{4}+x^2=1\Rightarrow x^2=\dfrac{4}{5}$

令 $P(x,y)\Rightarrow \overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2\cdot\dfrac{4}{5}}=\sqrt{1.6}$

2、(E) 設 $A(3,1)$，$B(-4,6)$，P 點滿足 $\overline{PA}-\overline{PB}=8$，則 P 點所形成之軌跡圖形爲 (A)沒有圖形 (B)一射線 (C)二射線 (D)雙曲線 (E)雙曲線的一支

解析：$\overline{AB}=\sqrt{49+25}=\sqrt{74}>8=\overline{PA}-\overline{PB}$ $\therefore$其圖形爲雙曲線的一支

3、(C) 雙曲線 $4(x-1)^2-9(y+2)^2=36$ 上任一點到兩漸近線的距離之積爲 (A)$\dfrac{12}{7}$ (B)$\dfrac{7}{12}$ (C)$\dfrac{36}{13}$ (D)$\dfrac{13}{36}$ (E)12

解析：雙曲線 $a^2=9$，$b^2=4$，其上任一點到兩漸近線的距離之積爲 $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{36}{13}$

4、(C) 設雙曲線 $\left|\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y-9)^2}\right|=6$，則共軛軸長爲 (A)$2\sqrt{7}$ (B)6 (C)8 (D)10 (E)$2\sqrt{34}$

解析：雙曲線兩焦點 $F(-2,1)$，$F'(4,9)$，$\overline{FF'}=10>6$ $\therefore a=3,\ c=5,\ b=4$，共軛軸長爲 8

5、(ACE) 關於雙曲線 $x^2-y^2=1$，下列選項何者爲真？(複選)
(A)對稱於y軸 (B)對稱於直線 $x-y=0$ (C)直線 $x+y=0$ 爲一漸近線
(D)$(-2,0)$ 及 $(2,0)$ 爲其焦點 (E)$(-1,0)$ 及 $(1,0)$ 爲其頂點

解析：$\because x$ 用 $-x$ 代入方程式不改變 $\therefore$對稱 y 軸

令 $x^2-y^2=0$ 得漸近線 $x+y=0$ 與 $x-y=0$

$\because a=1,\ b=1$ $\therefore c^2=a^2+b^2=2\Rightarrow c=\sqrt{2}$ $\therefore$焦點$(\sqrt{2},0)(-\sqrt{2},0)$

令 $y=0\Rightarrow x=\pm1$ $\therefore$頂點爲 $(1,0),(-1,0)$

二、填充題 (每題 10 分)

6、中心爲(1,2)，短軸有一端點爲(−5,2)，正焦弦爲 7.2 的橢圓之方程式爲______。

答案：$\dfrac{(x-1)^2}{36}+\dfrac{(y-2)^2}{100}=1$

解析：中心(1,2)，$b=6$，$\dfrac{2b^2}{a}=7.2$ $\therefore a=10$，直橢圓爲 $\dfrac{(x-1)^2}{36}+\dfrac{(y-2)^2}{100}=1$

7、試求中心爲(0,0)，焦點在 y 軸上，長軸長爲短軸的 5 倍且經過(2 , 5)，則此橢圓方程式爲______。

答案：$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{125}=1$

解析：$\because a=5b$，中心爲(0,0)的直橢圓爲 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{25b^2}=1$

代入(2 , 5)得 $b^2=5$，$b=\sqrt{5}$　$\therefore$方程式爲 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{125}=1$

8、過(4,0)且與 $x^2+y^2=36$ 相切之圓的圓心軌跡方程式爲______。

答案：$\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

解析：設過 $F(4,0)$ 且與 $x^2+y^2=36$ 相切之圓心爲 $P(x,y)$，半徑爲 r，則 $\overline{PF}=r$，O 爲原點，$\overline{PO}=6-r$　$\therefore \overline{PF}+\overline{PO}=6$

故其軌跡方程式爲橢圓中心(2,0)，$c=2$，$a=3$，$b=\sqrt{5}$，橫橢圓爲 $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

9、一線段 AB 長爲 8，A 在 x 軸上、B 在 y 軸上移動，若 $P\in\overline{AB}$ 且 $\overline{AP}=6$，則 $\overline{AB}$ 移動時，P 點的軌跡方程式爲__________。

答案：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{36}=1$

解析：令 $A(a,0),B(0,b)$, $\therefore \overline{AB}=8\Rightarrow a^2+b^2=64$，$\therefore \overline{AP}:\overline{BP}=6:2=3:1$

$\therefore P(\dfrac{a}{4},\dfrac{3b}{4})$，$\therefore x=\dfrac{a}{4},y=\dfrac{3b}{4}$，$\therefore a=4x,b=\dfrac{4}{3}y$，$\therefore (4x)^2+(\dfrac{4}{3}y)^2=64$

$\Rightarrow$方程式爲 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{36}=1$。

10、設 F 與 F' 爲橢圓 $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 之兩焦點，且 F 在 F' 之右側，點 $P(6,2)$ 爲橢圓上的一點，則(1) $\overline{PF}=$______，(2) $\cos(\angle FPF')=$______。

答案：$\sqrt{5}$，$\dfrac{3}{5}$

解析：$\dfrac{x^2}{(3\sqrt{5})^2}+\dfrac{y^2}{(2\sqrt{5})^2}=1, a=3\sqrt{5}, b=2\sqrt{5}, c=\sqrt{a^2-b^2}=5$，中心 $(0,0)$，二焦點 $F(5,0), F'(-5,0)$，且 $\overline{PF}=\sqrt{(6-5)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$，又 $\overline{PF}+\overline{PF'}=2a=6\sqrt{5}$，故 $\overline{PF'}=5\sqrt{5}$，又 $\overline{FF'}=10$，$\therefore \cos(\angle FPF')=\dfrac{5+125-100}{2\times\sqrt{5}\times5\sqrt{5}}=\dfrac{3}{5}$

11、橢圓 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 之內接矩形中，最大面積爲何？最大周長爲何？

答案：設橢圓上有一點 $P(\sqrt{2}\cos\theta, 2\sqrt{2}\sin\theta)$ 爲內接矩形在第一象限上的頂點，則
內接矩形的面積爲 $4\sqrt{2}\cos\theta\cdot 2\sqrt{2}\sin\theta=8\sin 2\theta\le 8$，
內接矩形的最大周長爲 $4(2\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta)=4\sqrt{10}(\sin(\theta+\phi))\le 4\sqrt{10}$

12、已知雙曲線之貫軸長等於共軛軸長時，稱爲等軸雙曲線，若有一等軸雙曲線之中心爲(1,1)又經過點(3,1)，已知其一漸近線方程式爲 $x-3y+2=0$ 則另一條漸近線爲______，

又此等軸雙曲線的方程式為______。

答案：$3x+y-4=0$, $(3x+y-4)(x-3y+2)=12$

解析：漸近線 $x-3y+2=0$ 斜率 $m=-\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{3}$，等軸雙曲線漸近線互相垂直，另一漸近線斜率為 -3，又中心為$(1,1)$，故另一漸近線為 $y-1=-3(x-1)\Rightarrow 3x+y-4=0$

設雙曲線方程式為 $(3x+y-4)(x-3y+2)=k$，代入$(3,1)$，$\therefore k=12$

$\therefore (3x+y-4)(x-3y+2)=12$

13、方程式 $x^2-9y^2+12x-36y-9=0$ 之焦點坐標與漸近線方程式各為________；________

答案：$(-6\pm\sqrt{10},-2)$，$x+3y+12=0$，$x-3y=0$

解析：$(x+6)^2-9(y+2)^2=9\Rightarrow \dfrac{(x+6)^2}{9}-\dfrac{(y+2)^2}{1}=1$，$\therefore a^2=9, a=3, b^2=1, b=1$

$\therefore c=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ 且圖形為橫擺的，$\therefore$焦點$(-6\pm\sqrt{10},-2)$，$(x+6)^2-9(y+2)^2=0$

$\therefore [(x+6)-3(y+2)][(x+6)+3(y+2)]=0$，$\therefore$漸近線為 $x+3y+12=0$ 或 $x-3y=0$。

14、設方程式 $\dfrac{x^2}{2t-1}+\dfrac{y^2}{t^2-4}=1$的圖形為雙曲線，則 t 的範圍為______，又若此雙曲線之貫軸為 x 軸，則 t 的範圍為______。

答案：$t<-2$ 或 $\dfrac{1}{2}<t<2$, $\dfrac{1}{2}<t<2$

解析：$\because$圖形為雙曲線　$\therefore (2t-1)(t^2-4)<0$　$\therefore t<-2$ 或 $\dfrac{1}{2}<t<2$

若貫軸為 x 軸，則 $2t-1>0$, $t^2-4<0$　$\therefore \dfrac{1}{2}<t<2$

15、一雙曲線過一點 $P(10,25)$，而兩漸近線為 $2x+y+5=0$，$2x-y+7=0$，則此雙曲線之方程式為______。

答案：$(2x+y+5)(2x-y+7)=100$

解析：設雙曲線為 $(2x+y+5)(2x-y+7)=k$，代入$(10,25)$

$\Rightarrow (2x+y+5)(2x-y+7)=100$

16、設雙曲線方程式為 $4x^2-9y^2+8x+36y+4=0$，則其中心坐標為______，其漸近線方程式為______，又其共軛雙曲線方程式為______。

答案：$(-1,2)$, $2x+3y-4=0$ 和 $2x-3y+8=0$，$4(x+1)^2-9(y-2)^2=36$

解析：$4(x+1)^2-9(y-2)^2=-36$　$\therefore$中心為$(-1,2)$，其共軛雙曲線為 $4(x+1)^2-9(y-2)^2=36$

其漸近線為 $2(x+1)\pm3(y-2)=0$ 即 $2x+3y-4=0$ 和 $2x-3y+8=0$

17、與雙曲線 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{8}=1$ 共焦點且通過$(0,-1)$之橢圓方程式為______。

答案：$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{1}=1$

解析：與雙曲線共焦點為 $\dfrac{x^2}{16+t}+\dfrac{y^2}{-8+t}=1$ 且過$(0,-1)$　$\therefore t=9$，　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{1}=1$

18、一雙曲線的中心為$(1,-2)$，一頂點為$(-1,-2)$，一漸近線為 $2x+y=0$，則求此雙曲線之方程式為_______。

答案：中心(1,–2)，$a=2$，漸近線斜率為–2　$\therefore \frac{b}{a}=2$，$b=4$，橫雙曲線$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{16}=1$

19、設 F，F'為雙曲線上的兩焦點，又 P 為雙曲線上的一點，且 $\overline{PF}=4$，$\overline{PF'}=6$，又 $\angle FPF'=60°$，則$\overline{FF'}$=______又共軛軸長=______。

答案：$2\sqrt{7}$，$2\sqrt{6}$

解析：$\overline{PF}=4$，$\overline{PF'}=6$，$\angle FPF'=60°$　$\therefore \overline{FF'}^2=16+36-2\times4\times6\times\frac{1}{2}=28$

$\therefore \overline{FF'}=2\sqrt{7}$　$\therefore c=\sqrt{7}$　$\left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right|=2=2a$　$\therefore a=1$，$b=\sqrt{6}$，共軛軸長$2\sqrt{6}$

20、與圓$(x+4)^2+y^2=36$相切，且過(4, 0)之所有圓的圓心軌跡方程式為__________。

答案：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$

解析：令圓心$O(x,y)$，

(1)若外切時，$\overline{OA}=r+6,\ \overline{OB}=r$，$\therefore \overline{OA}-\overline{OB}=6$

(2)若內切時，$\therefore \overline{OA}=r-6,\ \overline{OB}=r$，$\overline{OB}-\overline{OA}=6$

由(1), (2)得$\left|\overline{OA}-\overline{OB}\right|=6<\overline{AB}=8$，$\therefore$圖形為雙曲線

$\therefore A, B$ 為焦點，中心(0, 0), $2a=6,\ a=3,\ 2c=8,\ c=4$，且圖形為橫雙曲線，

$\therefore b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{7}$, 方程式為 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$。

21、設雙曲線之中心為(2,–1)，貫軸長為共軛軸長的 3 倍，且頂點在$y=-1$上，圖形通過$(-3,\frac{1}{3})$，則雙曲線方程式為______，又正焦弦長為______。

答案：$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{1}=1$，$\frac{2}{3}$

解析：雙曲線中心為(2,–1)，又$a=3b$，頂點在$y=-1$上

$\therefore$雙曲線為$\frac{(x-2)^2}{9b^2}-\frac{(y+1)^2}{b^2}=1$，代入$(-3,\frac{1}{3})$，則$b=\pm1$（但$b>0$），$a=3$

$\therefore$雙曲線為$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{1}=1$，正焦弦長$\frac{2}{3}$