高雄市明誠中學 高二數學寒假作業　　日期：94.02.24					
範圍	1-1&1-2 拋物線橢圓	班級	普二　　班	姓名	
		座號			

一. 選擇題 (每題 10 分)

1、(D) 設有一橢圓，長軸在直線 $x=5$ 上，短軸在 $y=1$ 上，已知短軸爲長軸之 3/5 倍，且中心到焦點的距離等於 12，則橢圓方程式爲 (A) $\frac{(x-1)^2}{81}+\frac{(y-5)^2}{225}=1$ (B) $\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$ (C) $\frac{(x-5)^2}{45}+\frac{(y-1)^2}{125}=1$ (D) $\frac{(x-5)^2}{81}+\frac{(y-1)^2}{225}=1$ (E) $\frac{(x-5)^2}{225}+\frac{(y-1)^2}{81}=1$

解析：y 方向的橢圓，中心(5 , 1)，$c=12$，又 $b=\frac{3}{5}a$，$a^2=b^2+c^2$　$\therefore a=15$，$b=9$

$\therefore$ 橢圓爲 $\frac{(x-5)^2}{81}+\frac{(y-1)^2}{225}=1$

2、(A) 坐標平面上有一橢圓，已知其長軸平行 x 軸，短軸的一個頂點爲(−2 , 1)且其中一焦點爲(1 , −3)，則橢圓之長軸長爲 (A)10 (B)8 (C) $2\sqrt{13}$ (D)6 (E)5

解析：$\because$ 長軸平行 x 軸又焦點爲(1 , −3)　$\therefore$ 長軸爲 $y=-3$

短軸頂點爲(−2 , 1)，故短軸爲 $x=-2$，中心爲(−2 , −3)

$b=4$，$c=3$　$\therefore a=5$　　$\therefore$ 長軸長爲 10

3、(C) 拋物線 $y^2=4x-2y-5$ 之準線方程式爲

(A) $x=2$ (B) $x=1$ (C) $x=0$ (D) $y=-1$ (E) $y=-2$

解析：配方後 $(y+1)^2=4(x-1)\Rightarrow x$ 方向拋物線，開口向右，$c=1$，準線爲 $x=0$

4、(B) 設拋物線 $y^2=8x$ 上有一焦弦 $\overline{AB}$，其坐標爲 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，若知 $x_1+x_2=7$，則 $\overline{AB}$ = (A)13 (B)11 (C)9 (D)7 (E)5

解析：$(y-0)^2=4\cdot2\cdot(x-0)\Rightarrow c=2$，頂點(0 , 0)，開口向右，焦點 $F(2 , 0)$，準線 $x=-2$，

$y_1^2=8x_1, y_2^2=8x_2\Rightarrow \overline{FA}=\sqrt{(x_1-2)^2+(y_1-0)}=\sqrt{(x_1-2)^2+8x_1}=\sqrt{(x_1+2)^2}$

$\therefore$ $\overline{FA}=x_1+2$，同理 $\overline{FB}=x_2+2$　$\therefore \overline{AB}=\overline{AF}+\overline{FB}=x_1+x_2+4$　$\therefore$ $\overline{AB}$ =11

二、填充題 (每題 10 分)

5、一焦點爲(0, 4)，長軸長爲 10，短軸在 $x=2$ 上的橢圓方程式爲__________。

答案：$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{21}=1$

解析：短軸在 $x=2$，$\therefore$ 中心(2, 4)且爲橫橢圓，$\therefore c=2,\ 2a=10,\ a=5\Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{21}$，

$\therefore$ 方程式爲 $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{21}=1$。

6、設方程式 $\frac{y^2}{3-t}+\frac{x^2}{1+t}=1$ 爲焦點在 y 軸上之橢圓方程式，則實數 t 的範圍爲______。

答案：$-1<t<1$

解析：焦點在 y 軸上之橢圓 $\Rightarrow \begin{cases} 1+t>0 \\ 3-t>0 \\ 3-t>1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t>-1 \\ t<3 \\ t<1 \end{cases} \Rightarrow -1<t<1$

7、$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=10$ 的圖形，其中心坐標爲______，長軸長是______，短軸所在的直線方程式爲__________。

答案：(2, 0)；10；$x+2y-2=0$

解析：令 $F_1(1,-2), F_2(3,2), P(x,y)$，$\therefore \overline{PF_1}+\overline{PF_2}=10>\overline{F_1F_2}=2\sqrt{5}$，圖形爲橢圓，

中心 $(\frac{1+3}{2},\frac{-2+2}{2})=(2,0)$，長軸長 $=2a=10$

$\because m_{長軸}=\frac{-2-2}{1-3}=2$，$\therefore m_{短軸}=-\frac{1}{2}$，$\therefore$ 方程式爲 $y-0=-\frac{1}{2}(x-2)\Rightarrow x+2y-2=0$。

8、已知一橢圓的長軸兩端點爲 $A(7,-2)$，$A'(-3,-2)$，兩焦點之間的距離爲 4，則此橢圓之方程式爲______，又其正焦弦長爲______。

答案：$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{21}=1,\quad \frac{42}{5}$

解析：中心爲(2 , –2)的橫橢圓，$a=5$，$2c=4$，$c=2$，$b=\sqrt{21}$

$\therefore$ 橢圓方程式爲 $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{21}=1$，正焦弦長 $\frac{2b^2}{a}=\frac{42}{5}$

9、過 $A(0,4)$ 且與 $x^2+(y-2)^2=16$ 相切的所有圓，其圓心的軌跡方程式爲__________。

答案：$\frac{x^2}{3}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$

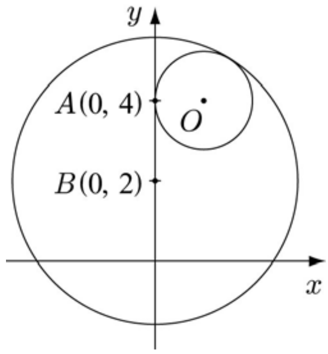
解析：令圓心爲 $O(x,y)$，$\therefore \overline{OB}=4-r,\ \overline{OA}=r$，

$\therefore \overline{OA}+\overline{OB}=4>\overline{AB}=2$，$\therefore$ 圖形爲橢圓

$\therefore A(0,4), B(0,2)$ 爲二焦點，

$\therefore$ 中心 $C(0,3), 2c=2, c=1, 2a=4, a=2$

$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，$\therefore$ 方程式爲 $\frac{x^2}{3}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$。

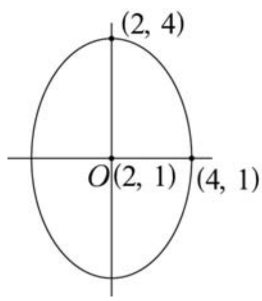


10、長軸一頂點爲(2, 4)，短軸一頂點爲(4, 1)，且長軸與 y 軸平行的橢圓方程式爲__________。

答案：$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

解析：中心爲(2, 1)且爲直立的圖形，$\therefore a=3,\ b=2$，$\therefore$ 方程式爲

$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$。



11、試求中心爲(0,0)，焦點在 y 軸上，長軸長爲短軸的 5 倍且經過(2 , 5)，則此橢圓方程式爲______。

答案：$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{125}=1$

解析：$\because a=5b$，中心爲(0,0)的直橢圓爲 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{25b^2}=1$

代入(2 , 5)得$b^2=5$ ，$b=\sqrt{5}$　$\therefore$方程式爲$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{125}=1$

12、(1)橢圓$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{1}=1$的兩焦點坐標爲______。

(2)設一橢圓與已知橢圓$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{1}=1$共焦點，且過(3,2)，則此橢圓方程式爲______。

答案：(1)$(\sqrt{5},0)$，$(-\sqrt{5},0)$, (2)$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{10}=1$

解析：(1)$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{1}=1$　$\therefore a=\sqrt{6}$ ，$b=1$，$c=\sqrt{5}$　$\therefore$焦點爲$(\sqrt{5},0)$，$(-\sqrt{5},0)$

(2)與$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{1}=1$共焦點之橢圓爲$\dfrac{x^2}{6+t}+\dfrac{y^2}{1+t}=1$，代入(3,2)

$\Rightarrow t^2-6t-27=0$　$\therefore t=9$或 -3（不合）$\therefore$橢圓方程式爲$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{10}=1$

13、設P爲橢圓$\Gamma:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$上的一點且位在上半平面。若$F_1,F_2$爲$\Gamma$之焦點，且$\angle F_1PF_2$爲直角，則$P$點的$y$坐標爲______。(化成最簡分數)

答案：$\dfrac{9}{4}$

解析：Sol 一：

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$，兩焦點爲$F_1(4,0),\ F_2(-4,0)$

設P之坐標爲$(5\cos\theta,3\sin\theta),\ 0<\theta<\pi$

$\overrightarrow{F_1P}=(5\cos\theta-4,3\sin\theta)$ ；$\overrightarrow{F_2P}=(5\cos\theta+4,3\sin\theta)$

$\angle F_1PF_2$爲直角$\Rightarrow \overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=0$

$\Rightarrow (5\cos\theta-4)(5\cos\theta+4)+(3\sin\theta)^2=0$

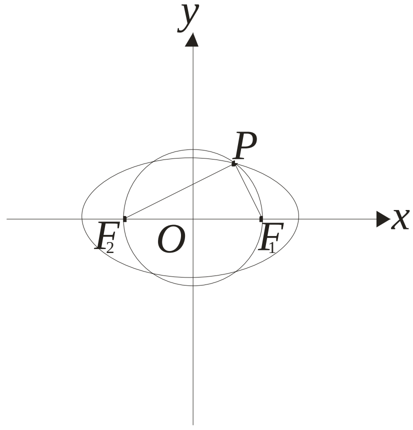
$\Rightarrow 25\cos^2\theta-16+9\sin^2\theta=0$

$\Rightarrow 25(1-\sin^2\theta)-16+9\sin^2\theta=0$

$\Rightarrow 16\sin^2\theta=9$

$\Rightarrow \sin^2\theta=\dfrac{9}{16}$ (但$\sin\theta>0$)

$\Rightarrow \sin\theta=\dfrac{3}{4}$



P之y坐標爲$3\sin\theta=3\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{4}$

Sol 二：

$\sqrt{25-9}=4\Rightarrow$以$\overline{F_1F_2}$爲直徑的圓之方程式爲

$x^2+y^2=4^2\cdots\cdots①$

已知橢圓之方程式爲$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1\cdots\cdots②$

②$\times25-$①　$\dfrac{16}{9}y^2=9$，$y^2=\dfrac{9^2}{16}$(但$y>0$)，$y=\dfrac{9}{4}$

14、設焦點為(1 ,1)，對稱軸平行 x 軸，正焦弦長為 8 之拋物線方程式為______或______。

答案：$(y-1)^2=8(x+1)$ ，$(y-1)^2=-8(x-3)$

解析：$4|c|=8 \quad \therefore \ c=\pm 2$ ，

當 $c=2$，頂點為$(-1 , 1)$，拋物線為 $(y-1)^2=8(x+1)$

當 $c=-2$，頂點為$(3 , 1)$，拋物線為 $(y-1)^2=-8(x-3)$

15、對稱軸平行於 x 軸，而且過 $A(-3 , 2)$、$B(0 , 3)$、$C(5 , 4)$三點的拋物線方程式為______，又其焦點坐標為______。

答案：$x=(y-1)^2-4$ ，$(-\frac{15}{4},1)$

解析：Sol1：

設 $x=ay^2+by+c$ ，$A(-3 , 2)$、$B(0 , 3)$、$C(5 , 4)$三點代入

$\begin{cases}-3=4a+2b+c \\ 0=9a+3b+c \\ 5=16a+4b+c\end{cases}$ ，解之 $\begin{cases}a=1 \\ b=-2 \\ c=-3\end{cases}$ ，$x=y^2-2y-3 \Rightarrow (y-1)^2=4\cdot\frac{1}{4}\cdot(x+4)$

$c=\frac{1}{4}$ ，開口向右，頂點為$(-4 , 1)$，$\therefore$ 焦點$(-\frac{15}{4},1)$

Sol2：

設拋物線為 $x=a(y-3)(y-\alpha)+0$，代入$(-3 , 2)$與$(5 , 4)$，$3=a(2-\alpha)$，$5=a(4-\alpha)$

$\therefore \ a=1$ ，$\alpha=-1$

$\therefore \ x=(y-3)(y+1)=y^2-2y-3=(y-1)^2-4$

$\therefore$ 頂點為$(-4 , 1)$，$c=\frac{1}{4}$ $\therefore$ 焦點$(-\frac{15}{4},1)$

16、設拋物線 Γ 之焦點為(1,3)，準線為 $2x+y+5=0$，則其頂點為______，對稱軸為______。

答案：$(-1,2)$, $x-2y+5=0$

解析：焦點 $F(1,3)$，準線 L：$2x+y+5=0$，$d(F,L)=\frac{|2\times 1+3+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}$

焦點 F 在準線 L 之投影點為 $(1,3)-\frac{10}{\sqrt{5}}\cdot\frac{(2,1)}{\sqrt{5}}=(-3,1)$

$\therefore$ 頂點為$(-1,2)$，對稱軸為 $x-2y+5=0$

17、直線 $y=x+k$ 與拋物線 $y=-x^2+3x+5$ 相交於相異兩點 P、Q，

(1)求 k 的範圍為______，(2)若 $\overline{PQ}=6\sqrt{2}$ ，則 $k=$ ______。

答案：$k<6$, -3

解析：$\begin{cases}y=x+k \\ y=-x^2+3x+5\end{cases} \Rightarrow x^2-2x+(k-5)=0$

(1) 相交於相異兩點 P、Q $\therefore$ $D>0$, $1-(k-5)>0$, $k<6$

(2) 設 $P(x_1,y_2),Q(x_2,y_2)$ ，則 x_1,x_2 為 $x^2-2x+(k-5)=0$ 之二根且 $\begin{cases}x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=k-5\end{cases}$

因 $y_1=x_1+k,\ y_2=x_2+k \Rightarrow y_1-y_2=x_1-x_2$ ，且 $\overline{PQ}=6\sqrt{2}$ ，

故 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=6\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2(x_1-x_2)^2}=6\sqrt{2} \Rightarrow (x_1-x_2)^2=36$ ，

又 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2 \Rightarrow (2)^2-4(k-5)=36$ ，$k=-3$

18、拋物線 $4y^2+4y-12x+13=0$ 之頂點爲______，焦點爲______，對稱軸爲______，準線爲______。

$\boxed{\text{答案}}$：$(1,-\frac{1}{2})$，$(\frac{7}{4},-\frac{1}{2})$，$y=-\frac{1}{2}$，$x=\frac{1}{4}$

$\boxed{\text{解析}}$：配方 $(y+\frac{1}{2})^2=4\cdot\frac{3}{4}\cdot(x-1)$ 爲 x 方向拋物線且開口向右

$\therefore$ 頂點爲$(1,-\frac{1}{2})$，$c=\frac{3}{4}$，焦點爲$(\frac{7}{4},-\frac{1}{2})$，對稱軸爲 $y=-\frac{1}{2}$，準線 $x=\frac{1}{4}$

19、設圓 C 與圓 $x^2+y^2=1$ 及直線 $y=-3$ 相切，則動圓 C 之圓心之軌跡方程式爲______或______。

$\boxed{\text{答案}}$：$x^2=8(y+2)$，$x^2=4(y+1)$

$\boxed{\text{解析}}$：(1)若圓 C 與圓 $x^2+y^2=1$ 外切，則其圓心軌跡方程式爲焦點在$(0,0)$，準線爲 $y=-4$ 的拋物線方程式，故頂點爲$(0,-2)$，$c=2$，$\therefore$其方程式爲 $x^2=8(y+2)$，

(2)若圓 C 與圓 $x^2+y^2=1$ 內切，則其圓心軌跡方程式爲焦點爲$(0,0)$，準線爲 $y=-2$ 的拋物線方程式，故其頂點爲$(0,-1)$，$c=1$，方程式爲 $x^2=4(y+1)$