高雄市明誠中學 高二數學寒假作業 日期：94.02.06					
範圍	1-1 拋物線+ans	班級	普二　　班	姓名	
		座號			

一. 選擇題 (每題 10 分)

1、(C) 拋物線 $y^2=4x-2y-5$ 之準線方程式爲

(A) $x=2$ (B) $x=1$ (C) $x=0$ (D) $y=-1$ (E) $y=-2$

解析：配方後 $(y+1)^2=4(x-1)\Rightarrow x$ 方向拋物線，開口向右，$c=1$，準線爲 $x=0$

2、(B) 設拋物線 $y^2=8x$ 上有一焦弦 $\overline{AB}$，其坐標爲 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，若知 $x_1+x_2=7$，則 $\overline{AB}=$ (A)13 (B)11 (C)9 (D)7 (E)5

解析：$(y-0)^2=4\cdot2\cdot(x-0)\Rightarrow c=2$，頂點(0 , 0)，開口向右，焦點 $F(2,0)$，準線 $x=-2$，

$y_1{}^2=8x_1,\ y_2{}^2=8x_2\Rightarrow\overline{FA}=\sqrt{(x_1-2)^2+(y_1-0)}=\sqrt{(x_1-2)^2+8x_1}=\sqrt{(x_1+2)^2}$

$\therefore$ $\overline{FA}=x_1+2$，同理 $\overline{FB}=x_2+2$ $\therefore\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{FB}=x_1+x_2+4$ $\therefore$ $\overline{AB}=11$

3、(E) 設拋物線 Γ 之焦點坐標爲(2 , 2)，準線方程式爲 $x+y+4=0$，則下列何者可爲正焦弦之端點坐標？ (A)(−2 , −2) (B)(0 , 0) (C)(2 , 2) (D)(4 , 0) (E)(6 , −2)

解析：焦點爲(2 , 2)，準線爲 $x+y+4=0$ 故正焦弦在直線 $x+y-4=0$ 上，且其方向向量 $(1,-1)$

$d(F,L)=\dfrac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}=2|c|$ $\therefore$ $|c|=2\sqrt{2}$

$\therefore$ 利用位移量求正焦弦兩端點爲 $(2,2)\pm4\sqrt{2}\times\dfrac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$=(6 , −2) 或 (−2 , 6)

4、($\begin{smallmatrix}\text{AB}\\\text{DE}\end{smallmatrix}$) 滿足下列各條件中的二次函數 $y=ax^2+bx+c$，頂點在的位置何者正確？(複選)

(A) $a>0$，$b>0$，$b^2-4ac>0$，第三象限

(B) $a<0$，$b<0$，$b^2-4ac>0$，第二象限

(C) $a<0$，$b<0$，$b^2-4ac<0$，第一象限

(D) $a>0$，$b>0$，$c<0$，第三象限

(E) $a>0$，$b<0$，$c<0$，第四象限

二. 填充題 (每題 10 分)

5、平面上通過(−2,−1)且與 $x=3$ 相切的所有圓之圓心軌跡方程式爲______。

答案：$(y+1)^2=-10(x-\dfrac{1}{2})$

解析：設圓心 $C(x,y)$，$F(-2,-1)$，L: $x-3=0$ $\therefore$ $d(C,F)=d(F,L)$

$\therefore$ 圓心軌跡爲拋物線，其方程式爲 $(y+1)^2=-10(x-\dfrac{1}{2})$

6、設拋物線之頂點爲(0 , 2)，焦點爲(−2 , 2)，則此拋物線方程式爲______。

答案：$(y-2)^2=-8x$

解析：由頂點焦點位置知，x 方向拋物線開口向左，$c=-2$，故方程式爲 $(y-2)^2=-8(x-0)$

7、在△ABC 中，設 $\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BC}=2$，有一拋物線 Γ 之頂點爲 B，焦點爲 C，又過 A 點，則 $\overline{AB}$ 之長爲______。

答案：3

解析：建立坐標系設 $B(0,0)$，$C(2,0)$ $\therefore$拋物線爲 $y^2=8x$，又 $\overline{AB}=\overline{AC}$，$\dfrac{1}{2}\overline{BC}=1$

$x=1$ 代入 $y^2=8x\Rightarrow y=\pm2\sqrt{2}$ $\therefore$ A 坐標爲 $(1,2\sqrt{2})$ $\therefore$ $\overline{AB}=3$

8、設焦點爲(1 ,1)，對稱軸平行 x 軸，正焦弦長爲 8 之拋物線方程式爲______或______。

答案：$(y-1)^2=8(x+1)$ ，$(y-1)^2=-8(x-3)$

解析：$4|c|=8$ ∴ $c=\pm 2$ ，

當 $c=2$，頂點爲(−1 , 1)，拋物線爲 $(y-1)^2=8(x+1)$

當 $c=-2$，頂點爲(3 , 1)，拋物線爲 $(y-1)^2=-8(x-3)$

9、設二拋物線 $y=3x^2+6x+3+2a$ 與 $y=-2x^2+4bx+3-2b^2$ 共頂點，則此頂點坐標爲______，又 $a=$ ______，$b=$ ______。

答案：(−1,3), $\dfrac{3}{2}$, −1

解析：$y=3(x+1)^2+2a$ 與 $y=-2(x-b)^2+3$ 共頂點 $(-1,2a)=(b,3)$

∴ $b=-1$，$2a=3$ ∴ $a=\dfrac{3}{2}$ ，頂點爲(−1, 3)

10、對稱軸平行於 x 軸，而且過 $A(-3 , 2)$、$B(0 , 3)$、$C(5 , 4)$三點的拋物線方程式爲______，又其焦點坐標爲______。

答案：$x=(y-1)^2-4$ ，$(-\dfrac{15}{4},1)$

解析：Sol1：

設 $x=ay^2+by+c$ ，$A(-3 , 2)$、$B(0 , 3)$、$C(5 , 4)$三點代入

$$\begin{cases}-3=4a+2b+c\\ 0=9a+3b+c\\ 5=16a+4b+c\end{cases}，解之\begin{cases}a=1\\ b=-2\\ c=-3\end{cases}，x=y^2-2y-3\Rightarrow (y-1)^2=4\cdot\frac{1}{4}\cdot(x+4)$$

$c=\dfrac{1}{4}$ ，開口向右，頂點爲(−4 , 1)，∴ 焦點$(-\dfrac{15}{4},1)$

Sol2：

設拋物線爲 $x=a(y-3)(y-\alpha)+0$，代入(−3 , 2)與(5 , 4)，$3=a(2-\alpha)$，$5=a(4-\alpha)$

∴ $a=1$ ，$\alpha=-1$

∴ $x=(y-3)(y+1)=y^2-2y-3=(y-1)^2-4$

∴ 頂點爲(−4 , 1)，$c=\dfrac{1}{4}$ ∴ 焦點$(-\dfrac{15}{4},1)$

11、設拋物線 Γ 之焦點爲(1,3)，準線爲 $2x+y+5=0$，則其頂點爲______，對稱軸爲______。

答案：(−1,2), $x-2y+5=0$

解析：焦點 $F(1,3)$，準線 L：$2x+y+5=0$，$d(F,L)=\dfrac{|2\times 1+3+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}$

焦點 F 在準線 L 之投影點爲 $(1,3)-\dfrac{10}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{(2,1)}{\sqrt{5}}$=(−3,1)

∴ 頂點爲(−1,2)，對稱軸爲 $x-2y+5=0$

12、直線 $y=x+k$ 與拋物線 $y=-x^2+3x+5$ 相交於相異兩點 P、Q，

(1)求 k 的範圍爲______，(2)若 $\overline{PQ}=6\sqrt{2}$ ，則 $k=$ ______。

答案：$k<6$, −3

解析：$\begin{cases}y=x+k\\ y=-x^2+3x+5\end{cases}\Rightarrow x^2-2x+(k-5)=0$

(1) 相交於相異兩點 P、Q ∴ $D>0$, $1-(k-5)>0$, $k<6$

(2) 設$P(x_1,y_2),Q(x_2,y_2)$，則x_1,x_2爲$x^2-2x+(k-5)=0$之二根且$\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1x_2=k-5\end{cases}$

因$y_1=x_1+k,\ y_2=x_2+k\Rightarrow y_1-y_2=x_1-x_2$，且$\overline{PQ}=6\sqrt{2}$，

故$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=6\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2(x_1-x_2)^2}=6\sqrt{2}\Rightarrow(x_1-x_2)^2=36$，

又$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\Rightarrow(2)^2-4(k-5)=36$，$k=-3$

13、拋物線$4y^2+4y-12x+13=0$之頂點爲______，焦點爲______，對稱軸爲______，準線爲______。

答案：$(1,-\frac{1}{2})$，$(\frac{7}{4},-\frac{1}{2})$，$y=-\frac{1}{2}$，$x=\frac{1}{4}$

解析：配方$(y+\frac{1}{2})^2=4\cdot\frac{3}{4}\cdot(x-1)$爲 x 方向拋物線且開口向右

$\therefore$ 頂點爲$(1,-\frac{1}{2})$，$c=\frac{3}{4}$，焦點爲$(\frac{7}{4},-\frac{1}{2})$，對稱軸爲$y=-\frac{1}{2}$，準線$x=\frac{1}{4}$

14、設拋物線$y=x^2-3x+2$與$y=-2x^2+5x-3$相交於P、Q兩點，則PQ直線方程式爲______。

答案：$x+3y=1$

解析：$\begin{cases}y=x^2-3x+2\cdots\cdots(1)\\y=-2x^2+5x-3\cdots\cdots(2)\end{cases}$　$(1)\times2+(2)\Rightarrow3y=-x+1$　$\therefore$ PQ方程式爲$x+3y=1$

15、設拋物線Γ頂點爲$(1,2)$，其對稱軸平行於y軸，又通過點$P(2,4)$，則Γ之方程式爲______。

答案：$y=2(x-1)^2+2$

解析：設Γ：$(x-1)^2=4c(y-2)$，代入$(2,4)$，得$c=\frac{1}{8}\Rightarrow(x-1)^2=\frac{1}{2}(y-2)\Rightarrow y=2x^2-4x+4$

16、拋物線$y=x^2+2(t+1)x+2t+2$之頂點隨著實數t的改變而變，求頂點之軌跡方程式爲______。

答案：$y=-(x+1)^2+1$

解析：$y=(x+t+1)^2-t^2+1$　$\therefore$頂點爲$(-t-1,-t^2+1)$

頂點$x=-t-1$，$y=-t^2+1$　$\therefore$消去t得頂點軌跡方程式爲$y=-(x+1)^2+1$

17、試求頂點爲$(-2,-1)$，對稱軸平行y軸，正焦弦長爲5之拋物線方程式爲______或______。

答案：$(x+2)^2=5(y+1)$，$(x+2)^2=-5(y+1)$

解析：$4|c|=5$　$\therefore$ $c=\pm\frac{5}{4}$　$\therefore$ 拋物線爲$(x+2)^2=5(y+1)$或$(x+2)^2=-5(y+1)$

18、設一拋物線之正焦弦二端點爲$P(1,1)$，$Q(-3,1)$，則拋物線方程式爲______或______。

答案：$(x+1)^2=4y$，$(x+1)^2=-4(y-2)$

解析：焦點爲$(-1,1)$，$c=\pm1$　$\therefore$ 拋物線爲$(x+1)^2=4y$或$(x+1)^2=-4(y-2)$

19、拋物線$x^2+6x+4y+1=0$之頂點爲______，又準線方程式爲______。

答案：$(-3,2)$，$y=3$

解析：$(x+3)^2=-4y+8$　$\therefore(x+3)^2=-4(y-2)$，$c=-1$爲$y$方向拋物線且開口向下，

頂點爲$(-3,2)$，準線爲$y=3$

20、設圓C與圓$x^2+y^2=1$及直線$y=-3$相切，則動圓C之圓心之軌跡方程式爲______或

______。

$\boxed{答案}$：$x^2=8(y+2)$, $x^2=4(y+1)$

$\boxed{解析}$：(1)若圓 C 與圓 $x^2+y^2=1$ 外切，則其圓心軌跡方程式為焦點在(0 , 0)，準線為 $y=-4$ 的拋物線方程式，故頂點為(0 , –2)，$c=2$，∴其方程式為 $x^2=8(y+2)$，

(2)若圓 C 與圓 $x^2+y^2=1$ 內切，則其圓心軌跡方程式為焦點為(0 , 0)，準線為 $y=-2$ 的拋物線方程式，故其頂點為(0 , –1)，$c=1$，方程式為 $x^2=4(y+1)$

21、焦點為(1, 2)，正焦弦長 4，對稱軸 $x=1$ 之拋物線方程式為______。(兩解)

$\boxed{答案}$：$(x-1)^2=4(y-1)$，$(x-1)^2=-4(y-3)$

22、設 P 點在拋物線 $y=x^2-x-2$ 上移動，平面上有二定點 $A(4 , 0)$，$B(3, -1)$，則 P 點坐標為何時，△ABP 有最小面積，又此最小面積為何？

$\boxed{答案}$：設 $P(t\,,\ t^2-t-2)\Rightarrow \overrightarrow{AP}=(t-4,t^2-t-2), \overrightarrow{AB}=(-1,-1)$

△ABP 面積

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} t-4 & t^2-t-2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|t^2-2t+2\right|=\frac{1}{2}\left|(t-1)^2+1\right|\geq\frac{1}{2}$$

∴ 令 $t=1$，$P(1 , -2)$時，△ABP 有最小面積$\frac{1}{2}$

23、試求以直線 L: $2x+y-7=0$ 為準線，$F(-2, 1)$為焦點的拋物線 Γ 之方程式。

$\boxed{答案}$：$P(x, y)\in\Gamma \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\dfrac{|2x+y-7|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=\frac{(2x+y-7)^2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5(x+2)^2+5(y-1)^2=(2x+y)^2-14(2x+y)+49$$

$$\Leftrightarrow (5x^2+20x+20)+5y^2-10y+5$$

$$= 4x^2+4xy+y^2-28x-14y+49$$

$$\Leftrightarrow x^2-4xy+4y^2+48x+4y-24=0$$

故 Γ 之方程式為 $x^2-4xy+4y^2+48x+4y-24=0$。

24、試求對稱軸平行於 x 軸，而過 $A(2, 1), B(4, 2), C(4, -1)$三點的拋物線之方程式。

$\boxed{答案}$：

Sol1：

設 $x=ay^2+by+c$，$A(2, 1), B(4, 2), C(4, -1)$三點代入

$$\begin{cases} 2=a+b+c \\ 4=4a+2b+c \\ 4=a-b+c \end{cases}，解之\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}，x=y^2-y+2$$

Sol2：

過 $B(4, 2), C(4, -1)$兩點之坐標，設此拋物線之方程式為 $x=a(y-2)(y+1)+4$

$A(2,1)$代入， $2=a(1-2)(1+1)+4$ $a=1$

故拋物線之方程式為 $x=(y-2)(y+1)+4$ 即 $x=y^2-y+2$。

25、設 k 為一常數。已知一拋物線通過點 $(2,0)$，且焦點為 $(1,2)$，準線為 $kx+y+1=0$，求此拋物線頂點的坐標。

$\boxed{答案}$：設動點為 $P(x, y)$，已知焦點 $F(1,2)$，準線 $L: kx+y+1=0$，由拋物線定義知：

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\dfrac{|kx+y+1|}{\sqrt{k^2+1}}$

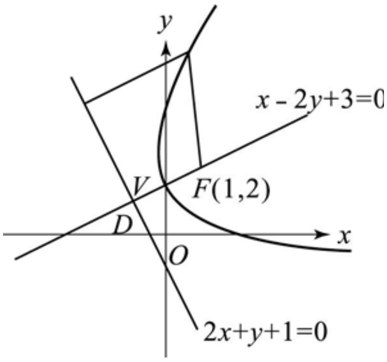
將 $(2,0)$ 代入上式，得 $\sqrt{1+4}=\dfrac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}} \Rightarrow 5=\dfrac{(2k+1)^2}{k^2+1} \Rightarrow 5(k^2+1)=4k^2+4k+1$

$\therefore k^2-4k+4=0 \Rightarrow (k-2)^2=0 \Rightarrow k=2$ 故準線 $L:2x+y+1=0$。

對稱軸過焦點 $F(1,2)$ 且垂直準線，其方程式為 $y-2=\dfrac{1}{2}(x-1) \Rightarrow x-2y+3=0$

解 $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$，得準線與對稱軸交點坐標 $D(-1,1)$。

頂點 V 為 $\overline{DF}$ 中點且焦點 $F(1,2)$、$D(-1,1)$，所以 V 坐標為 $(0,\dfrac{3}{2})$，即 $V(0,\dfrac{3}{2})$。



26、試依 k 之值討論 $\left|x^2-4\right|+2x=k$ 的實根個數。

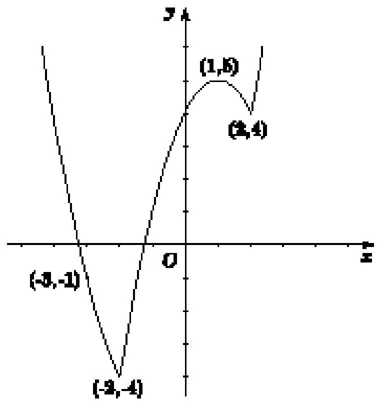
答案：

$\begin{cases} y=\left|x^2-4\right|+2x \\ y=k \end{cases}$

當 $x^2-4\ge 0$ 時即 $x\ge 2, x\le -2$，$y=x^2+2x-4$

當 $x^2-4<0$ 時即 $-2\le x\le 2$，$y=-x^2+2x+4$

則 $y=\left|x^2-4\right|+2x$ 的圖形如右，且 $y=k$ 為一水平直線



故 $\left|x^2-4\right|+2x=k$ 的實根個數即 $\begin{cases} y=\left|x^2-4\right|+2x \\ y=k \end{cases}$ 二圖形交點數

k 值	$k<-4$	$k=-4$	$-4<k<4$	$k=4$	$4<k<5$	$k=5$	$k>5$
實根個數	0	1	2	3	4	3	2