高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：94.01.06
範圍	4-4 球之切平面	班級	普二　　班	姓名	
		座號			

一. 選擇題 (每題 10 分)

1、(D) 求 $P(1, 2,-1)$到 $S: 2x^2+2y^2+2z^2+2x-4z-3=0$ 之切線段長為何？

(A)$\sqrt{21}$ (B)$\sqrt{15}$ (C)$\frac{\sqrt{42}}{2}$ (D)$\frac{\sqrt{30}}{2}$ (E)2

解析：球面 $S: x^2+y^2+z^2+x-2z-\frac{3}{2}=0$，$\therefore$切線段長$=\sqrt{1+4+1+1+2-\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{15}{2}}=\frac{\sqrt{30}}{2}$

二. 填充題 (每題 10 分)

2、在球面 $S:(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=4$ 上找一點 P，使點 P 到直線 $L:\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+1}{1}$ 的距離為最大，則此最大距離為__________，又此時 P 點坐標為__________。

答案：$\sqrt{14}+2$；$(2-\frac{4}{\sqrt{14}},-1-\frac{6}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}})$

解析：球心 $S(2,-1,0)$在直線 $L: x=t+2,\ y=-t+4,\ z=t-1$ 之投影點為 $Q(t+2,\ -t+4,\ t-1)$

$\overrightarrow{QS}=(t,-t+5,t-1)$ 且 $(t,-t+5,t-1)\cdot(1,-1,1)=0,\ t=2$

$\therefore$投影點 Q 為$(4,2,1)$ $\therefore \overrightarrow{QS}=(-2,-3,-1)$，$\therefore$最大距離為$\overline{QS}+r=\sqrt{14}+2$

以位移量求 P 點，從求心 S 向 $\overrightarrow{QS}$ 方向移動 2 單位即為 P 點

$P(2,-1,0)+2\times\frac{(-2,-3,-1)}{\sqrt{14}}=(2-\frac{4}{\sqrt{14}},-1-\frac{6}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}})$

3、直線 $L:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-4}{-1}$ 與球面 $S:(x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$ 相交於 P, Q 兩點，則此二點坐標為________和________。

答案：(1,0,3); (5,–2,1)

解析：直線 $L: x=2t-1,\ y=-t+1,\ z=-t+4$ 代入球面 S

$\therefore (2t-1-2)^2+(-t+1+2)^2+(-t+4-1)^2=9$

$6t^2-24t+18=0$ $\therefore t=1$或 3 $\therefore$此二交點為(1,0,3)和(5,–2,1)

4、空間中，球面 $S: (x-3)^2+y^2+(z+4)^2=25$ 被平面 $x=2$ 切割的截面圓方程式為__________。

答案：$\begin{cases} y^2+(z+4)^2=24 \\ x=2 \end{cases}$

解析：$x=2$ 代入球面球面 $S: (2-3)^2+y^2+(z+4)^2=25 \Rightarrow y^2+(z+4)^2=24$

5、求球面 $x^2+y^2+z^2+x-5y+4z-6=0$ 截 x 軸所得之弦長為______，截 y 軸所得之弦長為______。

答案：5; 7

解析：(1)x 軸：令 $y=0$ 且 $z=0$ $\therefore x^2+x-6=0$，$x=-3$或 2

$\therefore$截 x 軸於(–3,0,0), (2,0,0)，弦長為 5

(2)y 軸：令 $x=0$ 且 $z=0$ $\therefore y^2-5y-6=0$，$y=6$或–1

$\therefore$截 y 軸於(0,–1,0), (0,6,0)，弦長為 7

6、一球面 S 與 xz 平面相交於一圓 $(x-1)^2+(z-3)^2=13$，又球面 S 通過點(3,1,5)，則球心坐標爲＿＿＿＿＿，球的半徑爲＿＿＿＿＿。

答案：(1,–2,3); $\sqrt{17}$

解析：設球面爲 $(x-1)^2+(y-b)^2+(z-3)^2=13+b^2$，代入(3,1,5)，得 $b=-2$

$\therefore$ 球心爲(1,–2,3)，半徑 $\sqrt{17}$

7、設兩球 S_1 $:(x-1)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=16$，$S_2$ $:x^2+y^2+z^2+10x+2y+8z-1=0$ 相交於一圓，則此圓之圓心爲＿＿＿＿＿，圓的半徑爲＿＿＿＿＿。

答案：(–1,–3,0); $\sqrt{7}$

解析：兩球球心 S_1 $(1,-4,2)$，S_2 $(-5,-1,-4)$

兩球之根平面爲 $S_2-S_1 \Rightarrow 12x-6y+12z-6=0$

$\therefore$交圓落於根平面 $\pi:2x-y+2z-1=0$ 上，球心(1,–4,2)到平面 π 之距離爲 $\dfrac{|9|}{3}=3$

$\therefore$圓之半徑 $=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

$\overleftrightarrow{S_1S_2}:x=1+2t, y=-4-t, z=2+2t$，代入根平面 $\pi:2x-y+2z-1=0 \Rightarrow t=-1$

交圓圓心爲 $(-1,-3,0)$

8、設平面 $\pi:x+2y+z+2=0$ 截一球面 $S:(x-5)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=10$ 於一圓，則此圓之圓心爲＿＿＿＿＿，圓的半徑爲＿＿＿＿＿。

答案：(4,–3,0); 2

解析：球心到平面 π 之距離爲 $\dfrac{|5-2+1+2|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$，球之半徑爲 $\sqrt{10}$，$\therefore$圓之半徑爲 $\sqrt{10-6}=2$

設圓心 $C(5+t,-1+2t,1+t)$ 代入平面 $\pi:x+2y+z+2=0 \Rightarrow t=-1$

截圓圓心爲 $(4,-3,0)$

9、設球面 S 與平面 $\pi:x+2y-2z+3=0$ 相切於一點 $P(1,-3,-1)$ 且點 $Q(0,-2,1)$ 亦在球面 S 上，則球心坐標爲＿＿＿，球之半徑爲＿＿＿。

答案：(0,–5,1); 3

解析：球面 S 與平面 π 相切於 P $\therefore$球心在 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$ 上

設所求球心 $S(1+t,-3+2t,-1-2t)$ 代入 $\pi:x+2y-2z+3=0 \Rightarrow t=-1$

$\therefore$球心爲(0,–5,1)，半徑 $\overline{SP}=\sqrt{(0-1)^2+(-5+3)^2+(1+1)^2}=3$

10、設平面 $\pi:2x-3y+6z=k$ 與球面 $x^2+y^2+z^2-6x-8y+2z+25=0$ 相切，則 $k=$＿＿＿或＿＿＿。

答案：–5; –19

解析：π 與 S 相切 $\therefore \dfrac{|6-12-6-k|}{7}=1$ $\therefore |k+12|=7$ $k=-5$ 或 -19

11、設平面 π 包含直線 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-6}=\dfrac{z}{4}$ 且與球面 $S:(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=6$ 相切，則平面 π 的方程式爲＿＿＿或＿＿＿。

答案：$2x+y+z-7=0$；$22x-17y-31z+63=0$

解析：將直線 L 改成兩面式 $\begin{cases}6x+y-11=0\\4x-z-4=0\end{cases}$ $\therefore$設平面 π 爲 $(6x+y-11)+k(4x-z-4)=0$

因爲與球面 S 相切，$\dfrac{|6+4k-1-11-4k|}{\sqrt{(6+4k)^2+1^2+(-k)^2}}=\sqrt{6}$ ，

$\therefore 17k^2+48k+31=0 \qquad k=-1$ 或 $-\dfrac{31}{17}$

$\therefore$ 平面 π 爲 $2x+y+z-7=0$ 或 $22x-17y-31z+63=0$

12、在坐標空間中，通過 $O(0,0,0)$，$N(0,0,1)$，$P(\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{11}}{4},-\dfrac{1}{2})$ 三點的平面與球面 S：$x^2+y^2+z^2=1$ 相交於一個圓 C，則圓 C 的劣弧 NP 的弧長等於______。(化成最簡分數)

答案：$\dfrac{2}{3}\pi$

解析：球面 S 與通過 O,N,P 三點的平面之截圓，其圓心即爲球心(0,0,0)，半徑爲球半徑 1；

令 $\overrightarrow{ON}$ 與 $\overrightarrow{OP}$ 的夾角爲 θ，則 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{ON}|\ |\overrightarrow{OP}|}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{1\cdot 1}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

劣弧 NP 弧長 $=r\theta=1\cdot\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{2}{3}\pi$

13、在球面 $S:(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=4$ 上找一點 P，使點 P 到平面 $\pi:x+2y-2z-1=0$ 之距離最小，則此最小距離爲______，又此 P 點坐標爲______。

答案：$\dfrac{2}{3};(-\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{3})$

解析：球心到平面 $x+2y-2z-1=0$ 之距離爲 $\dfrac{8}{3}$，球之半徑爲 2，$\therefore$ 最小距離爲 $\dfrac{8}{3}-2=\dfrac{2}{3}$

以位移量求 P 點坐標爲 $(-1,0,3)+2\times\dfrac{1}{3}(1,2,-2)=(-\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{3})$

14、球心爲(0,0,2)又與球 $S_1:x^2+y^2+z^2-4x+6y+8z+20=0$ 相切之球面方程式爲______或______。

答案：$x^2+y^2+(z-2)^2=16$；$x^2+y^2+(z-2)^2=100$

解析：球 S_1 之球心爲(2,−3,−4)，半徑爲 3，連心線長 7

若兩球外切可得 $x^2+y^2+(z-2)^2=16$

若兩球內切可得 $x^2+y^2+(z-2)^2=100$

15、球心在 z 軸上，半徑爲 4 且切於 xy 平面之球面方程式爲____________________。

答案：令球心 $O(0,0,t)$，$\therefore |t|=4, t=\pm 4$

$\therefore$ 球面 S: $x^2+y^2+(z+4)^2=16$ 或 $x^2+y^2+(z-4)^2=16$

16、設直線 L: $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ 與球面 S: $x^2+y^2+z^2+2x+6z+k=0$ 相切於一點 A，求 k 値及 A 坐標。

答案：L: $\begin{cases}x=-2+2t\\ y=2+t\\ z=3+t\end{cases}$，設 $A(-2+2t,2+t,3+t)$ 代入球面 S

$(-2+2t)^2+(2+t)^2+(3+t)^2+2(-2+2t)+6(3+t)+k=0\Rightarrow 6t^2+12t+(k+31)=0$

$\because L$ 與 S 相切，判別式 $=0$，故 $12^2-4\cdot 6\cdot(k+31)=0\Rightarrow k=-25$

$\therefore 6t^2+12t+6=0 \Rightarrow (t+1)^2=0 \Rightarrow t=-1$，$\therefore A(-4, 1, 2)$

17、試求過球面 $x^2+y^2+z^2-2x+6y+4z-35=0$ 上一點 $P(3, -6, 4)$ 而與此球相切的平面之方程式。

$\boxed{答案}$：過切點之平面之方程式為 $3x-6y+4z-2\cdot\dfrac{x+3}{2}+6\cdot\dfrac{y-6}{2}+4\cdot\dfrac{z+4}{2}-35=0$

即 $2x-3y+6z-48=0$

18、試求過一點 $P(3, 4, -5)$ 而與三個坐標軸都相切的球面之方程式。

$\boxed{答案}$：設此球面之方程式為 $\Gamma:(x-a)^2+(y-a)^2+(z+a)^2=2a^2$

將 $P(3, 4, -5)$ 代入 Γ 中，得

$(3-a)^2+(4-a)^2+(-5+a)^2=2a^2 \Rightarrow a^2-24a+50=0 \Rightarrow a=12\pm\sqrt{94}$

故所求球面

$\Gamma_1:(x-12-\sqrt{94})^2+(y-12-\sqrt{94})^2+(z+12+\sqrt{94})^2=2(12+\sqrt{94})^2$

$\Gamma_2:(x-12+\sqrt{94})^2+(y-12+\sqrt{94})^2+(z+12-\sqrt{94})^2=2(12-\sqrt{94})^2$

19、空間中有直線 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$ 及球面 $S:(x-2)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=k$，則

(1)若直線 L 與球面 S 相切則 $k=$？(2)若直線 L 與球面 S 不相交則 k 的範圍為何？

$\boxed{答案}$：直線 $L: x=2t+1,\ y=-t+1,\ z=-t$

$(2t+1-2)^2+(-t+1+2)^2+(-t+1)^2=k \Rightarrow 6t^2-12t+11-k=0$

$D=(-12)^2-4\times6\times(11-k)=24\times(-5+k)$

若 $D=0$ 即 $k=5$，直線 L 與球相切

若 $D<0$ 即 $k<5$，直線 L 與球不相交，但球 S 之半徑為 $\sqrt{k}$

$\therefore k>0 \Rightarrow 0<k<5$

20、平面 π 包含兩點 $A(1,-5,3)$，$B(-4,-1,0)$ 且與球面 $S: x^2+y^2+z^2=9$ 相切，則平面 π 之方程式為何？

$\boxed{答案}$：$\overleftrightarrow{AB}$ 直線方程式 $\dfrac{x+4}{5}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z}{3}$，改成兩面式 $\begin{cases}4x+5y+21=0\\3y+4z+3=0\end{cases}$

故平面 π 可設為 $(4x+5y+21)+k(3y+4z+3)=0$

$\because \pi$ 與 S 相切　$\therefore \dfrac{|21+3k|}{\sqrt{16+(5+3k)^2+(4k)^2}}=3$　$\therefore 24k^2+16k-8=0$

$(3k-1)(k+1)=0$　$\therefore k=\dfrac{1}{3}$ 或 $k=-1$

$\therefore$ 平面 π 為 $2x+y-2z+9$ 或 $6x+9y+2z+33=0$

21、空間中有一球面 $S:(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$ 及球外一點 $P(5,1,7)$，自 P 點向球面 S 作切線，其所有切點恰好形成一個圓 C，則

(1)點 P 對球面 S 所作之切線段長為何？

(2)圓 C 所在之平面方程式為何？

(3)圓 C 之圓心為何？

$\boxed{答案}$：(1)切線段長 $=\sqrt{(5-2)^2+(1+1)^2+(7-1)^2-9}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

(2)圓 C 所在之平面為 $(5-2)(x-2)+2(y+1)+6(z-1)=9 \Rightarrow 3x+2y+6z-19=0$

(3)圓心為球心 $(2,-1,1)$ 在 $3x+2y+6z-19=0$ 之投影點

$$\left(2-\frac{1\times3\times(-9)}{3^2+2^2+6^2},-1-\frac{1\times2\times(-9)}{3^2+2^2+6^2},1-\frac{1\times6\times(-9)}{3^2+2^2+6^2}\right)=\left(\frac{125}{49},\frac{-31}{49},\frac{103}{49}\right)$$

22、設直線 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$，球面 $S: x^2+y^2+z^2+4x-6y+4z+16=0$，求直線 L 上一點 P，使 P 到 S 的距離爲最短。

$\boxed{答案}$：$P(\dfrac{5}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3})$

$\boxed{解析}$：$L:\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t\,,\ t\in\mathbb{R} \\ z=2-t \end{cases} \Rightarrow P(1+2t,-1+t,2-t)$

$S:(x+2)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=1 \Rightarrow$ 球心 $O(-2,3,-2)$，半徑 1

$\overrightarrow{OP}=(2t+3,t-4,-t+4)$，$L$ 的方向向量 $\vec{n}=(2,1,-1)$

$\because \overrightarrow{OP}\perp\vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}=0$，$2(2t+3)+(t-4)-(-t+4)=0 \Rightarrow 6t-2=0 \Rightarrow t=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore P(\dfrac{5}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3})$