高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.12.30					
範圍	4-3 球面方程式	班級	普二　　班	姓名	
		座號			

一. 選擇題 (每題 10 分)

1、(E) 設有一球，其半徑為$\sqrt{15}$，另有三平面E_1，E_2，E_3分別與此球相交於圓G_1，G_2，G_3，已知從球心到E_1，E_2，E_3的距離分別為$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，今以Δ_1，Δ_2，Δ_3分別表示圓G_1，G_2，G_3的面積，則$\Delta_1：\Delta_2：\Delta_3=$ (A)$\sqrt{3}：\sqrt{5}：\sqrt{6}$
(B)$\frac{1}{\sqrt{3}}：\frac{1}{\sqrt{5}}：\frac{1}{\sqrt{6}}$ (C)$\frac{1}{3}：\frac{1}{5}：\frac{1}{6}$ (D)$\sqrt{12}：\sqrt{10}：3$ (E)12：10：9

解析：設G_1，G_2，G_3之半徑分別為r_1，r_2，r_3
$r_1^2=15-3=12$，$r_2^2=15-5=10$，$r_3^2=15-6=9$
$\therefore \Delta_1：\Delta_2：\Delta_3=12：10：9$

2、(BCD) (複選)過$A(0, 6, 0)$, $B(0,-6, 4)$, $C(-7,-1, 0)$, $D(9,-1, 0)$四點之球面方程式為
$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$，則 (A)$d=2$ (B)$e=4$ (C)$f=8$ (D)$g=-60$
(E)$d+e+f=-10$

解析：將(0, 6, 0), (0,–6, 4), (–7,–1, 0), (9,–1, 0)代入

$$\therefore \begin{cases}36+6e+g=0\\52-6e+4f+g=0\\50-7d-e+g=0\\82+9d-e+g=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=-2\\e=4\\f=8\\g=-60\end{cases}$$

$d+e+f=-2+4+8=10$

3、(ABD) (複選)空間中兩相異球面的交集可能是
(A)空集合 (B)一點 (C)兩點 (D)一圓 (E)兩圓

解析：(1)若相異兩球心的距離大於兩球半徑和或小於兩球半徑差，則兩球面之交集為空集合。
(2)若兩球心的距離等於兩球半徑和或半徑差，則兩球面的交集為一點。
(3)若兩球心的距離大於兩球半徑差而小於兩球半徑和，則兩球面的交集為一圓。
(4)兩球面不可能剛好交於兩點，也不可能交於兩圓。

二. 填充題 (每題 10 分)

4、設$k\in\mathbb{R}$，若方程式$x^2+y^2+z^2+4kx-6y+8z+8k+25=0$之圖形為一點，則此點坐標為__________。

答案：$(0, 3, -4), (-4, 3, -4)$

解析：$x^2+y^2+z^2+4kx-6y+8z+8k+25=0\Rightarrow(x+2k)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=4k^2-8k$
圖形為一點$(-2k, 3, -4)\Rightarrow 4k^2-8k=0, 4k(k-2)=0\Rightarrow k=0, 2\Rightarrow(0,3,-4),(-4,3,-4)$

5、過點$P(1,2,3)$而與三個坐標平面都相切的球面方程式為______或______。

答案：$(x-3-\sqrt{2})^2+(y-3-\sqrt{2})^2+(z-3-\sqrt{2})^2=(3+\sqrt{2})^2$;
$(x-3+\sqrt{2})^2+(y-3+\sqrt{2})^2+(z-3+\sqrt{2})^2=(3-\sqrt{2})^2$

解析：設球面S為$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$
$\therefore(1-a)^2+(2-a)^2+(3-a)^2=a^2$　$\therefore a^2-6a+7=0$　$\therefore a=3\pm\sqrt{2}$
$\therefore$球面方程式為$(x-3-\sqrt{2})^2+(y-3-\sqrt{2})^2+(z-3-\sqrt{2})^2=(3+\sqrt{2})^2$

或 $(x-3+\sqrt{2})^2+(y-3+\sqrt{2})^2+(z-3+\sqrt{2})^2=(3-\sqrt{2})^2$

6、球心在 y 軸，且通過點 $A(4,1,3)$，點 $B(-2,-1,1)$的球面方程式的球心坐標爲__________，半徑爲__________。

答案：$(0,5,0)$; $\sqrt{41}$

解析：設球心$(0,b,0)$，$\overline{AB}$ 之垂直平分面爲 $3x+y+z=5$，且球心於垂直平分面上，$b=5$

$\therefore$球心爲$(0,5,0)$，半徑爲 $\sqrt{(0-4)^2+(5-1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{41}$

7、設 $x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z+k=0$ 爲一球面的方程式，則球心爲______，又 k 之條件爲______。

答案：$(1,-3,2)$; $k<14$

解析：$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=-k+14>0$ $\quad\therefore k<14$，$\therefore$球心爲$(1,-3,2)$

8、空間中，一點 $A(1, 2, -1)$到球面 $x^2+y^2+z^2+4x-6y+8z+25=0$ 最短距離爲 d，最遠距離爲 D，切線長 k，則數對(d, D, k) =____________。

答案：$(\sqrt{19}-2,\sqrt{19}+2,\sqrt{15})$

9、過點 $P(1,2,3)$而與三個坐標軸都相切的球面方程式的球心坐標爲______或______。

答案：$(6+\sqrt{22},6+\sqrt{22},6+\sqrt{22})$；$(6-\sqrt{22},6-\sqrt{22},6-\sqrt{22})$

解析：過點 $P(1,2,3)$而與三個坐標軸都相切的球面方程式的球心必於第一卦限

設球面方程式爲 $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=(\sqrt{2}a)^2$

$\therefore (1-a)^2+(2-a)^2+(3-a)^2=2a^2$, $a^2-12a+14=0$, $a=6\pm\sqrt{22}$

球心爲 $(6+\sqrt{22},6+\sqrt{22},6+\sqrt{22})$ 或 $(6-\sqrt{22},6-\sqrt{22},6-\sqrt{22})$

10、求過 $A(0, 2, 2)$, $B(4, 0, 0)$且球心在 y 軸上之球面方程式爲__________________。

答案：令球心 $O(0, t, 0)$

$\therefore \overline{OA}=\overline{OB}\Rightarrow (t-2)^2+4=16+t^2$, $\therefore t=-2$， $\therefore$球面 S: $x^2+(y+2)^2+z^2=20$

11、設 $m\in\mathbb{R}$，且 $x^2+y^2+z^2-2(m+1)x-2my+2mz+4m^2-2=0$ 爲一球面，若此球面有最大半徑時，求此時的球心坐標爲____________，半徑爲______。

答案：原式$\Rightarrow [x-(m+1)]^2+(y-m)^2+(z+m)^2$

$=-4m^2+2+(m+1)^2+m^2+m^2=-m^2+2m+3$

$\therefore -m^2+2m+3>0\Rightarrow -1<m<3$，球心 $(m+1,m,-m)$

$\therefore r^2=-m^2+2m+3=-(m-1)^2+4\le 4$ $\quad\therefore$最大半徑$=\sqrt{4}=2$，球心$(2, 1,-1)$。

12、已知點 $A(-1,4,-5)$，點 $B(9,2,-3)$落在球面 S 上，且球心與 A, B 兩點共線，則球心坐標爲______，又球之半徑爲______。

答案：$(4,3,-4)$; $3\sqrt{3}$

解析：$\overline{AB}$ 爲直徑 $\quad\therefore$球心$(4,3,-4)$，半徑爲 $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

13、空間中，過 $A(4, 2, 2)$, $B(3,-3, 0)$且球心在 x 軸之球面方程式爲____________。

答案：$(x-3)^2+y^2+z^2=9$

14、已知 x, y, z 滿足 $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$，則(1) $(x+4)^2+(y-1)^2+(z+2)^2$ 之最大值爲______，最小值爲______, (2) $2x-y-2z$ 之最大值爲______，最小值爲______。

答案：(1)64; 36 (2)6; 0

解析：(1)$(-4,1,-2)$到球 $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$ 之

最近距離爲 $\sqrt{(-6)^2+2^2+(-3)^2}-1=6$，最遠距離爲 $7+1=8$

$\therefore (x+4)^2+(y-1)^2+(z+2)^2$ 之最大値爲 64，最小値爲 36

(2)設 $2x-y-2z=k$，$\dfrac{|4+1-2-k|}{3}\le 1$，$|k-3|\le 3$，$0\le k\le 6$ $\therefore$最大値 6，最小値 0

15、試求以 $A(-3, 2, -1)$爲球心，而過點 $B(0, -2, 11)$的球面之方程式。

答案：$\overline{AB}^2=(0+3)^2+(-2-2)^2+(11+1)^2=169$

故此球面之方程式爲 $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=169$

16、求以 $A(-2,-1, 3)$及 $B(4, 5,-3)$爲直徑之兩端點之球面方程式。

答案：直徑式 $(x+2)(x-4)+(y+1)(y-5)+(z-3)(z+3)=0\Rightarrow\therefore x^2+y^2+z^2-2x-4y-22=0$

17、試討論實係數三元二次方程式 $x^2+y^2+z^2+(k+3)x-2y+6z+(k+13)=0$ 的圖形。

答案：$D=(k+3)^2+2^2+6^2-4(k+13)=k^2+2k-3=(k+3)(k-1)$

(1)當 $k<-3$或$k>1$時，$D>0$，此方程式表一球面。

(2)當 $k=-3$或$k=1$時，$D=0$，此方程式表一點。

(3)當 $-3<k<1$時，$D<0$，此方程式之圖形不存在。

18、求如下球面的球心及半徑。

(1) $x^2+y^2+z^2+16x-20y-7z+20=0$ (2) $3x^2+3y^2+3z^2+5x+8y+6z=0$

答案：(1) $x^2+y^2+z^2+16x-20y-7z+20=0$ 配方

$$(x^2+16x+64)+(y^2-20y+100)+(z^2-7z+\frac{49}{4})=64+100+\frac{49}{4}-20$$

即 $(x+8)^2+(y-10)^2+(z-\frac{7}{2})^2=(\frac{25}{2})^2$，故球心爲 $(-8, 10, \frac{7}{2})$，半徑爲 $\frac{25}{2}$

(2) $3x^2+3y^2+3z^2+5x+8y+6z=0\Rightarrow$ $x^2+y^2+z^2+\frac{5}{3}x+\frac{8}{3}y+2z=0$，再配方

$$(x^2+\frac{5}{3}x+\frac{25}{36})+(y^2+\frac{8}{3}y+\frac{16}{9})+(z^2+2z+1)=\frac{25}{36}+\frac{16}{9}+1$$

即 $(x+\frac{5}{6})^2+(y+\frac{4}{3})^2+(z+1)^2=\frac{125}{36}$，故球心爲 $(-\frac{5}{6}, -\frac{4}{3}, -1)$，半徑爲 $\frac{5\sqrt{5}}{6}$

19、試討論實係數三元二次方程式 $x^2+y^2+z^2+(k-1)x-2y+6z+(k+12)=0$ 的圖形。

答案：$(x+\frac{k-1}{2})^2+(y-1)^2+(z+3)^2=-(k+12)+1+9+(\frac{k-1}{2})^2$

$(x+\frac{k-3}{2})^2+(y-1)^2+(z+3)^2=\frac{k^2-6k-7}{4}=\frac{(k-7)(k+1)}{4}$

$(k-7)(k+1)=0\Rightarrow k=7$ 或-1 時方程式表一點

$(k-7)(k+1)<0\Rightarrow k>7$ 或 $k<-1$ 時方程式表一球面

$(k-7)(k+1)>0\Rightarrow -1<k<7$ 時方程式之圖形不存在

20、試就 k 值討論平面 $\pi:2x-y-2z=k$ 與球面 $S:x^2+y^2+z^2-2x-6y-4z-2=0$ 的關係。

答案：球心爲(1,3,2)，半徑爲 4

若 $\dfrac{|2-3-4-k|}{3}>4$ 即 $|k+5|>12\Rightarrow k>7$ 或 $k<-17$，π 與 S 不相交

若 $\dfrac{|2-3-4-k|}{3}=4$ 即 $k=7$ 或 -17 時，π 與 S 相切

若 $\dfrac{|2-3-4-k|}{3}<4$ 即 $|k+5|<12\Rightarrow -17<k<7$，則 π 與 S 相交，其截痕爲一圓

21、就 k 值討論 $x^2+y^2+z^2+2(k-1)x-2ky+3k^2-7=0$ 之圖形。

答案：原式配方得 $(x+k-1)^2+(y-k)^2+z^2=-k^2-2k+8$

令 $\Delta=-k^2-2k+8=-(k+4)(k-2)$

(1) $\Delta>0$ 即 $-4<k<2 \Rightarrow$ 圖形表一球面

(2) $\Delta=0$ 即 $k=2$ 或 $-4 \Rightarrow$ 圖形表一點 $(-1, 2, 0)$ 或 $(5, -4, 0)$

(3) $\Delta<0$ 即 $k>2$ 或 $k<-4 \Rightarrow$ 不成任何圖形。