<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：93.12.23</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">4-2 圓之切線方程式
+Ans</td><td>班級</td><td></td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一. 選擇題 (每題 10 分)

1、(E) 已知圓$C:(x-1)^2+(y+3)^2=10$與直線$L:x+ky-2=0$相切，則$k=$

(A)-3　(B)$-\frac{1}{3}$　(C)0　(D)$\frac{1}{3}$　(E)3

解析：$\frac{|1-3k-2|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{10}$　$\therefore (k-3)^2=0$　$\therefore k=3$

2、(B) 設圓O: $x^2+y^2=27$，以$A(3,-4)$爲中點的弦的方程式爲$x+by+c=0$，求$b=$？

(A)$-\frac{5}{3}$ (B)$-\frac{4}{3}$ (C)$-\frac{3}{4}$ (D)$\frac{3}{4}$ (E)$\frac{4}{3}$

解析：令$\overleftrightarrow{PQ}$與圓O交於$P(x_1,y_1)$及$Q(x_2,y_2)$

$\therefore \begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}=3\\ \frac{y_1+y_2}{2}=-4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1+x_2=6\\ y_1+y_2=-8\end{cases}$ 且 $m=\frac{-1}{b}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$P(x_1,y_1)$及$Q(x_2,y_2)$皆於圓上$\Rightarrow \begin{cases}{x_2}^2+{y_2}^2=27\cdots\cdots①\\ {x_1}^2+{y_1}^2=27\cdots\cdots②\end{cases}$

由①−②得$(x_2-x_1)(x_2+x_1)+(y_2-y_1)(y_2+y_1)=0\Rightarrow(x_2-x_1)\cdot\mathbf{6}+(y_2-y_1)\cdot(\mathbf{-8})=0$

$\therefore m=\frac{-1}{b}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3}{4}\Rightarrow b=\frac{-4}{3}$

3、(D) 圓心在點(9,7)同時又與圓$x^2+y^2+2x-4y=15$相切的兩圓中較小者的半徑是

(A)$7\sqrt{5}$ (B)$\sqrt{5}$ (C)5 (D)$3\sqrt{5}$ (E)$2\sqrt{5}$

解析：兩圓之連心線長爲$5\sqrt{5}$，又圓$x^2+y^2+2x-4y=15$之半徑爲$2\sqrt{5}$

當兩圓外切時，較小圓半徑爲$5\sqrt{5}-2\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

4、(B) 與圓$x^2+y^2-8x-4y+16=0$關於直線$7x+5y=1$對稱的圓是

(A)$x^2+y^2+8x+4y+16=0$ (B)$x^2+y^2+6x+6y+14=0$

(C)$x^2+y^2+4x+8y+16=0$ (D)$x^2+y^2-4x-8y+16=0$

(E)$x^2+y^2-6x-6y+14=0$

解析：圓心爲(4,2)，半徑爲 2，對$7x+5y=1$之對稱圓之圓心爲

$(4,2)-2\times\frac{|7\times4+5\times2-1|}{\sqrt{74}}\times\frac{(7,5)}{\sqrt{74}}=(-3,-3)$，$\therefore$對稱圓爲$(x+3)^2+(y+3)^2=4$

二. 填充題 (每題 10 分)

5、有一圓$C:4x^2+4y^2-4x+4y+1=0$及圓C外一點$P(1,1)$，則點P到圓C之切線段長爲______。

答案：$\frac{3}{2}$

解析：切線段長$\sqrt{(1)^2+(1)^2-(1)+(1)+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

6、求過 $A(-6, 4)$ 且與圓 $C: x^2+y^2+2x-6y-15=0$ 相切之切線方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

答案：$12x-5y+92=0$ 或 $x=-6$

解析：令切線 $y-4=m(x+6) \Rightarrow L: mx-y+(6m+4)=0$

$\because$ 圓 $C: x^2+y^2+2x-6y-15=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=25$

$\therefore$ 圓心 $O(-1, 3)$，半徑 $r=5$，$\therefore d(O, L)=r \Rightarrow \left|\dfrac{-m-3+6m+4}{\sqrt{m^2+1}}\right|=5$

$\therefore 25m^2+10m+1=25(m^2+1)$，$\therefore m=\dfrac{12}{5}$，$\therefore$ 切線爲 $y-4=\dfrac{12}{5}(x+6)$ 或 $x=-6$

$\therefore$ 切線：$12x-5y+92=0$ 或 $x=-6$

7、坐標平面上，圓 $C: x^2+y^2+4x+2y-20=0$，圓外一點 $P(2,-6)$，過 P 對圓 C 做切線，切點爲 A, B，則過 P, A, B 三點的圓方程式爲＿＿＿＿。

答案：$(x-2)(x+2)+(y+6)(y+1)=0 \Rightarrow x^2+y^2+7y+3=0$

8、設圓 $C_1: x^2+y^2=1$ 與圓 $C_2: x^2+y^2+2x+4y+1=0$ 相交於 A, B 兩點，則

(1)直線 AB 的方程式爲＿＿＿＿＿＿,

(2)圓 C_3 通過 A, B 兩點且通過點 $D(3,0)$ 則圓 C_3 之方程式爲＿＿＿。

答案：(1) $x+2y+1=0$ (2) $x^2+y^2-2x-4y-3=0$

解析：(1)直線 AB 的方程式爲 $(x^2+y^2+2x+4y+1)-(x^2+y^2-1)=0 \Rightarrow x+2y+1=0$

(2)設通過 A, B 兩點之圓 C_3 爲 $(x^2+y^2-1)+2k(x+2y+1)=0$

此圓通過點 $D(3,0)$，$\therefore k=-1$ $\therefore$ 圓 C_3 之方程式爲 $x^2+y^2-2x-4y-3=0$

9、設圓 C 的方程式爲 $(x-3)^2+y^2=25$，則過點 $P(-1,3)$ 的切線方程式爲＿＿＿。

答案：$4x-3y+13=0$

解析：$\because P$ 爲切點 $\therefore$ 切線方程式爲 $(x-3)(-1-3)+3y=25 \Rightarrow 4x-3y+13=0$

10、設圓心在 $x-2y+3=0$ 上且與兩坐標軸相切之圓方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

答案：$(x+1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$

解析：令圓心 $O(2t-3, t)$，$\therefore |2t-3|=|t| \Rightarrow 2t-3=\pm t$，$\therefore t=3$ 或 1，$\therefore$ 圓心 $(-1, 1)$ 或 $(3, 3)$

$\therefore$ 圓：$(x+1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$

11、設圓 $C: x^2+(y+2)^2=9$，若點 $P(2,2)$ 爲圓外一點，點 $Q(0,-4)$ 爲圓內一點且直線 $\overline{PQ}$ 交圓 C 於 A, B 兩點則(1) $\overline{PA}\times\overline{PB}=$＿＿＿, (2) $\overline{QA}\times\overline{QB}=$＿＿＿。

答案：(1)11 (2)5

解析：(1) $\because P$ 爲圓外一點 $\therefore \overline{PA}\times\overline{PB}=P$ 到此圓之切線段長之平方 $=2^2+(2+2)^2-9=11$

(2)令 $T(x, y)=x^2+(y+2)^2-9$ (?)

$\because Q$ 爲圓內一點 $\therefore \overline{QA}\times\overline{QB}=-T(0,4)=-[0^2+(-4+2)^2-9]=5$

12、求圓 $C: x^2+y^2-6x-8y=0$ 上之點到直線 $L: 4x+3y+36=0$ 之最短距離爲＿＿＿。

答案：圓 $C: x^2+y^2-6x-8y=0 \Rightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=25$，圓心 $O(3, 4)$，半徑 $r=5$

$\therefore d(O, L)=\left|\dfrac{12+12+36}{\sqrt{16+9}}\right|=12$，$\therefore$ 最短距離 $=d(O, L)-r=12-5=7$

13、與直線 $2x-y-3=0$ 相切而圓心爲 $(-1,0)$ 的圓方程式爲＿＿＿。

答案：$(x+1)^2+y^2=5$

解析：$(-1,0)$到切線 $2x-y-3=0$ 之距離為 $=\left|\dfrac{\mathbf{-2-0-3}}{\sqrt{4+1}}\right|=\sqrt{\mathbf{5}}$ ，

所以圓之半徑為 $\sqrt{5}$ $\therefore$圓方程式為 $(x+1)^2+y^2=5$

14、設圓 C 的方程式為 $2x^2+2y^2-x-3y-5=0$ ，則過點 $P(2,1)$的切線方程式為______。

答案：$7x+y-15=0$

解析：$\because P$ 為切點 $\therefore$切線方程式為 $2\times 2\cdot x+2\times 1\cdot y-(\dfrac{x+2}{2})-3(\dfrac{y+1}{2})-5=0$

$\Rightarrow 7x+y-15=0$

15、設 $A(-4, 4)$，圓 C: $x^2+y^2-6x-6y-7=0$ 若通過 A 點對圓 C 作二切線得切點為 P, Q，則$\triangle APQ$ 之外接圓方程式為__________________。

答案： $x^2+y^2+x-7y=0$

解析：$\triangle APQ$ 之外接圓即以 $\overline{OA}$ 為直徑之圓，$\therefore$圓心 $O(3, 3)$

$\therefore (x-3)(x+4)+(y-3)(y-4)=0$ ，$\therefore$圓為 $x^2+y^2+x-7y=0$

16、對任意實數 k，圓 $x^2+y^2+kx+ky-13-5k=0$ 恆通過兩定點，則此二定點坐標為______和______；又對不同的 k 值，所產生之圓的圓心軌跡方程式為______。

答案：(2,3); (3,2); $x-y=0$

解析：$(x^2+y^2-13)+k(x+y-5)=0$

$\begin{cases} x^2+y^2-13=0 \\ x+y-5=0 \end{cases} \Rightarrow (x, y)=(2,3)$ 或(3,2)$\Rightarrow$ 為二定點

又其圓心軌跡方程式為(2,3)與(3,2)之中垂線，即 $x-y=0$

17、自點 $A(-3,2)$作圓 $C:(x-1)^2+y^2=5$ 的二切線分別切圓 C 於 P, Q 兩點則 (1)直線 PQ 的方程式為______, (2)又四邊形 $CPAQ$ 的面積為______。

答案：(1) $4x-2y+1=0$ (2) $5\sqrt{3}$

解析：(1)直線 $\overline{PQ}$ 之方程式為 $(x-1)(-3-1)+2y=5 \Rightarrow 4x-2y+1=0$

(2) $\overline{CA}=2\sqrt{5}$ ，圓 C 之半徑 $\sqrt{5}$ ，A 到圓 C 之切線段長為 $\sqrt{15}$

$\therefore$四邊形 $CPAQ$ 的面積為 $2\Delta CAP=2\times(\dfrac{1}{2}\times\sqrt{15}\times\sqrt{5})=5\sqrt{3}$

18、設圓 C 的方程式為 $x^2+y^2+8x-2y+13=0$ ，已知直線 L 斜率為 2，且與圓 C 相切則直線 L 的方程式為______或______。

答案：$y=2x+9+2\sqrt{5}$; $y=2x+9-2\sqrt{5}$

解析：圓 C 之圓心為$(-4,1)$，半徑為 2

設直線 L 為 $y=2x+k$, $\dfrac{|-8-1+k|}{\sqrt{5}}=2$ $\therefore |k-9|=2\sqrt{5}$

$\therefore k-9=\pm 2\sqrt{5}$ $\therefore k=9\pm 2\sqrt{5}$ $\therefore$直線 L 為 $y=2x+9+2\sqrt{5}$ 或 $y=2x+9-2\sqrt{5}$

19、過點$(2,-5)$的直線 L 交圓 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=10$ 於 P, Q 兩點且 $\overline{PQ}=2\sqrt{5}$ ，則直線 L 之斜率為______或______。

答案：-2; $\dfrac{11}{2}$

解析：設直線 PQ 為 $y+5=m(x-2)$, $\dfrac{|m-2-2m-5|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$

$\therefore 2m^2-7m-22=0$, $(m+2)(2m-11)=0$ $\therefore m=-2$ 或 $\dfrac{11}{2}$

20、直線 $L: 3x-4y+a=0$ 與圓 $x^2+y^2-2x+6y+b=0$ 相切於 $(c,1)$，則 $a=$______, $b=$______。

答案：10; −15

解析：圓心為(1,−3) $\therefore \dfrac{-3-1}{1-c}\times\dfrac{3}{4}=-1$ $\therefore c=-2$

(−2,1)代入 L，$-6-4+a=0$ $\therefore a=10$

(−2,1)代入圓方程式，$(-2)^2+1+4+6+b=0$, $b=-15$

21、二圓 $C_1: x^2+y^2+2x=0$, $C_2:(x+3)^2+(y+4)^2=9$ 則

(1)二圓之外公切線段長為何？

(2)二圓之二條外公切線的交點為何？

(3)二圓之二條外公切線方程式為何？

(4)二條外公切線之交角為 θ，則 $\sin\theta=$ ？

答案：(1)圓 C_1 圓心(−1,0)，半徑為 1

圓 C_2 : 圓心(−3,4)，半徑為 3，又連心線長 $2\sqrt{5}$

外公切線段長為 $\sqrt{\overline{C_1C_2}^2-(r_1-r_2)^2}=\sqrt{20-2^2}=4$

(2)二條外公切線的交點為 $\left(\dfrac{3\times(-1)+(-1)\times(-3)}{2},\dfrac{3\times 0+(-1)\times(-4)}{2}\right)=(0,2)$

(3)設外公切線方程式為 $y-2=m(x-0)$

$\therefore \dfrac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$ $\therefore 4m=3$ $\therefore m=\dfrac{3}{4}$

$\therefore$ 二條外公切線為 $y=\dfrac{3}{4}x+2$ 與 $x=0$

(4)二外公切線之交角為 θ $\therefore \sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore \sin\theta=2\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$

22、已知直線 $L: x+y=k$ 與圓 $C: x^2+y^2-4x-2y-4=0$ (1)若 L 與圓 C 相切時，k 的值為何？

(2)若 L 與圓 C 不相交時，k 的範圍為何？

答案：圓 C 之圓心為(2,1)，半徑為 3

(1)L 與圓 C 相切 $\Rightarrow \dfrac{|3-k|}{\sqrt{2}}=3$ $\therefore k=3\pm 3\sqrt{2}$

(2)L 與圓 C 不相交時 $\Rightarrow \dfrac{|3-k|}{\sqrt{2}}>3 \Rightarrow |k-3|>3\sqrt{2}$

$\therefore k>3+3\sqrt{2}$ 或 $k<3-3\sqrt{2}$