高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.12.16					
範圍	4-1 圓方程式+Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 選擇題 (每題 10 分)

1、(D) 與 x 軸相切且半徑爲 2 的圓方程式，若圓心爲(h,k)則下列何者恆爲真？ (A) $h=2$ (B) $k=2$ (C) $|h|=2$ (D) $|k|=2$ (E) $h=k$

2、(AC)設一圓通過 $A(5, 1)$, $B(3,-1)$兩點且圓心在直線 $x-2y+2=0$ 上，則此圓方程式爲 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ ，則（複選） (A) $d=-4$ (B) $e=4$ (C) $f=-2$ (D)圓心坐標爲$(2,-2)$ (E)半徑爲 10

解析：令圓心 $O(2t-2, t)$，$\therefore \overline{OA}=\overline{OB}$

$\therefore (2t-2-5)^2+(t-1)^2=(2t-2-3)^2+(t+1)^2 \Rightarrow t=2$

$\therefore$圓心 $O(2, 2)$，半徑 $r=\overline{OA}=\sqrt{10}$ ，$\therefore$圓：$(x-2)^2+(y-2)^2=10$

$\Rightarrow x^2+y^2-4x-4y-2=0$ ，$\therefore d=-4, e=-4, f=-2$ 。

3、(B) 設二元二次方程式 $ax^2+bxy-y^2+dx+ey+f=0$ 爲圓方程式，則下列何者非真？

(A) $a=-1$ (B) $d^2+e^2-4f>0$ (C)圓心$(\frac{d}{2},\frac{e}{2})$ (D) $b=0$

(E)此圓之半徑爲 $\sqrt{f+\frac{d^2}{4}+\frac{e^2}{4}}$

解析：令 $a=-1$ ，$b=0 \Rightarrow -x^2-y^2+dx+ey+f=0 \Rightarrow (x-\frac{d}{2})^2+(y-\frac{e}{2})^2=f+\frac{d^2}{4}+\frac{e^2}{4}$

$\therefore$圓心爲$(\frac{d}{2},\frac{e}{2})$，半徑爲 $\sqrt{f+\frac{d^2}{4}+\frac{e^2}{4}}$ $\therefore d^2+e^2+4f>0$

4、(B) 圓 $2x^2+2y^2-6x+2y-5=0$ 之中心及半徑爲

(A)$(\frac{3}{2},\frac{1}{2});\sqrt{5}$ (B)$(\frac{3}{2},-\frac{1}{2});\sqrt{5}$ (C)$(-\frac{3}{2},\frac{1}{2});\sqrt{5}$ (D)$(\frac{3}{2},\frac{1}{2});\frac{5}{2}$ (E)$(\frac{3}{2},-\frac{1}{2});\frac{5}{2}$

解析：$2(x-\frac{3}{2})^2+2(y+\frac{1}{2})^2=5+\frac{9}{2}+\frac{1}{2}$ ；$(x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=5$

5、(CD) 若方程式 $x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$ 之圖形表一圓，則m的範圍爲 $\alpha<m<\beta$ 且當 $m=\gamma$ 時，此圓有最大半徑爲 δ ，則（複選）

(A) $\alpha=-1$ (B) $\beta=3$ (C) $\gamma=-1$ (D) $\alpha+\beta+\gamma=-3$ (E) $\delta=4$

解析：$[x+(m-1)]^2+(y-m)^2=-3m^2+2+(m-1)^2+m^2=-m^2-2m+3=-(m+1)^2+4$

$\therefore -m^2-2m+3>0$ ，其圖形爲圓

$\therefore m^2+2m-3<0 \Rightarrow -3<m<1$

$\therefore \gamma^2=-(m+1)^2+4\le 4 \Rightarrow \gamma\le 2$

$\therefore \alpha=-3, \beta=1, \gamma=-1, \delta=2$，$\therefore \alpha+\beta+\gamma=-3+1-1=-3$

二. 填充題 (每題 10 分)

1、設圓 C_1 $: x^2+y^2+4x+2y-8=0$ 與直線 $x+y=2$ 相交於 A, B 兩點，又圓 C 爲通過 A, B 兩點，且與 x 軸相切之圓方程式，則圓 C 的方程式爲______或______。

答案：$x^2+y^2-2y=0$；$x^2+y^2-8x-10y+16=0$

解析：$\begin{cases}x^2+y^2+4x+2y-8=0\\x+y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}$或$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

$\overline{AB}$之中垂線為$y=x+1$ $\therefore$設圓心為$(t,t+1)$，半徑為$|t+1|$

$t^2+(t+1-2)^2=(t+1)^2$ $\therefore t=0$或4

(1)$t=0$時，圓C為$x^2+y^2-2y=0$

(2)$t=4$時，圓C為$x^2+y^2-8x-10y+16=0$

2、一圓通過$A(3, 2)$與$B(-1,4)$兩點並且圓心在直線$2x+y+3=0$上，則此圓的圓心為______，半徑為______。

答案：$(-1,-1)$; 5

解析：$\overline{AB}$之中垂線為$y-3=2(x-1)$與$2x+y+3=0$，相交於$(-1,-1)$，即為圓心，半徑為5

3、一動點$P(x,y)$與二點$(4,0)$, $(0,2)$的距離之平方和為11，此動點之點集圖形為一圓，此圓之方程式為______。

答案：$2x^2+2y^2-8x-4y+9=0$

解析：$(\sqrt{(x-4)^2+y^2})^2+(\sqrt{x^2+(y-2)^2})^2=11\Rightarrow 2x^2+2y^2-8x-4y+9=0$

4、圓O: $x^2+y^2-4x+6y+3=0$對於直線L: $x+y-1=0$的對稱圓的方程式為____________

答案：圓O: $x^2+y^2-4x+6y+3=0\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+3)^2=10$，$\therefore$圓心$O(2,-3)$，半徑$r=\sqrt{10}$

$\therefore$圓心O對於直線L: $x+y-1=0$之對稱點M，

$\therefore M(2-\dfrac{2\cdot1\cdot(-2)}{2},-3-\dfrac{2\cdot1\cdot(-2)}{2})=M(4,-1)$，$\therefore$對稱圓：$(x-4)^2+(y+1)^2=10$

5、圓O通過兩點$A(5,0)$, $B(3,4)$，圓O被y軸所截出之弦長為$2\sqrt{6}$，則圓C之圓心為______或______。

答案：$(2,1)$; $(38,19)$

解析：$\overline{AB}$之中垂線為$y-2=\dfrac{1}{2}(x-4)$ $\therefore x=2y$故可設圓心

為$(2t,t)$，圓心到y軸之距離為$|2t|$，$\therefore(2t)^2+(\sqrt{6})^2=(2t-5)^2+t^2$

$\therefore t^2-20t+19=0$，$t=1$或19 $\therefore$圓心為$(2,1)$或$(38,19)$

6、圓C切y軸於$(0,-4)$且與x軸交於A, B兩點，若$\overline{AB}=6$，則圓C之圓方程式為
______________或______________。

答案：$(x-5)^2+(y+4)^2=25$；$(x+5)^2+(y+4)^2=25$

解析：設圓心為$(h,-4)$，半徑為$|h|$, $h^2=3^2+4^2$ $\therefore h=\pm5$

$\therefore$圓方程式為$(x-5)^2+(y+4)^2=25$或$(x+5)^2+(y+4)^2=25$

7、求過$A(0, 2)$, $B(1, 1)$, $C(1,-1)$三點之圓的方程式為______________。

答案：令圓：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，將$(0, 2)$, $(1, 1)$, $(1,-1)$代入

$\therefore\begin{cases}4+2e+f=0\\2+d+e+f=0\\2+d-e+f=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=2\\e=0\\f=-4\end{cases}$ $\therefore$圓：$x^2+y^2+2x-4=0$

8、圓C以$(-2,1)$為圓心與圓C_1 : $x^2+y^2-4x+4y+4=0$相切，則圓C之方程式為______或______。

答案：$(x+2)^2+(y-1)^2=9$; $(x+2)^2+(y-1)^2=49$

解析：圓 C_1 $:(x-2)^2+(y+2)^2=4$，連心線長 5

(1)若圓 C 與圓 C_1 外切可得 $(x+2)^2+(y-1)^2=9$

(2)若圓 C 與圓 C_1 內切可得 $(x+2)^2+(y-1)^2=49$

9、設方程式 $ax^2+2y^2+4x-6y+k=0$ 為圓方程式，則 $a=$______，又 k 之條件為 ______。

答案：2; $k<\dfrac{13}{2}$

解析：$a=2$，$2x^2+4x+2+2y^2-6y+\dfrac{1}{2}=-k+2+\dfrac{1}{2}$

$2(x+1)^2+2(y-\dfrac{3}{2})^2=-k+\dfrac{13}{2}>0$ $\quad\therefore k<\dfrac{13}{2}$

10、與二坐標軸均相切且過(–2, 4)之圓的方程式為________________________________。

答案：$(x+2)^2+(y-2)^2=4$ 或 $(x+10)^2+(y-10)^2=100$

解析：∵與兩坐標軸均相切，∴令圓心(t, t)或$(t,-t)$

①當圓心(t, t)時，$(t+2)^2+(t-4)^2=t^2 \Rightarrow t^2-4t+20=0$（不合）

②當圓心$(t,-t)$時，$(t+2)^2+(-t-4)^2=t^2 \Rightarrow t^2+12t+20=0$，$\therefore t=-2$ 或 -10

∴圓：$(x+2)^2+(y-2)^2=4$ 或 $(x+10)^2+(y-10)^2=100$

11、一動點 $P(x,y)$ 到點(–1,0)之距離與其到點(3,0)之距離比為 1：3，此動點之點集圖形為一圓，此圓之圓心為______，半徑為______。

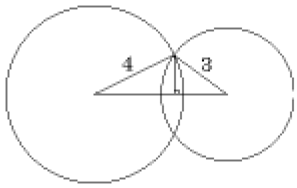
答案：$(-\dfrac{3}{2},0)$; $\dfrac{3}{2}$

解析：$\sqrt{(x+1)^2+y^2}:\sqrt{(x-3)^2+y^2}=1:3 \Rightarrow 3\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

$\therefore 9[(x+1)^2+y^2]=(x-3)^2+y^2 \Rightarrow 8x^2+8y^2+24x=0$

$\therefore x^2+y^2+3x=0$，$(x+\dfrac{3}{2})^2+y^2=(\dfrac{3}{2})^2$，圓心為$(-\dfrac{3}{2},0)$ 半徑 $\dfrac{3}{2}$

12、設二圓 $x^2+y^2-2x-8y+8=0$，$x^2-8x+y^2=0$ 的交點為 A, B，則 $\overline{AB}$ 的長度為______。



答案：$\dfrac{24}{5}$

解析：$(x-1)^2+(y-4)^2=3^2$，$(x-4)^2+y^2=4^2$

連心線長 5，兩圓半徑分別為 3,4，$\therefore \overline{AB}=2\times\dfrac{3\times4}{5}=\dfrac{24}{5}$

13、設點 $A(2,3)$ 為圓 $\mathrm{O}: x^2+y^2=16$ 之內部一點，則過 A 點的所有弦中點所形成之點集圖形方程式為一圓方程式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，則 $d=$______，$f=$______。

答案：–2; 0

解析：過 A 點的所有弦中點所形成之點集圖形為圓，其(0,0)與(2,3)恰為此圓直徑之兩端點

∴圓方程式為 $(x,y)\cdot(x-2,y-3)=0$ $\quad\therefore x^2+y^2-2x-3y=0$，$\therefore d=-2,\ e=-3,\ f=0$

14、坐標平面上兩點 $A(4,3)$, $B(-2,-1)$，若 $\overline{AB}$ 為圓 C 之一弦且弦心距為 $\sqrt{13}$，則此圓之圓心為______或______。

答案：(3,–2); (–1,4)

解析：$\overline{AB}$ 中點為(1,1), $\overrightarrow{AB}=(-6,-4)$ ，$(1,1)\pm\sqrt{13}\ (\frac{2,-3}{\sqrt{13}})=(3,-2)$或$(-1,4)$為圓心

15、圓 C 以 $A(-1,2)$與 $B(3,5)$之線段為直徑，則圓 C 之方程式為______。

答案：$x^2+y^2-2x-7y+7=0$

解析：$(x+1,y-2)\cdot(x-3,y-5)=0 \quad \therefore x^2+y^2-2x-7y+7=0$

16、若二元二次方程式 $4x^2+4y^2+4x-8y+1+k=0$ 之圖形為一點，則 $k=$______，又此點為______。

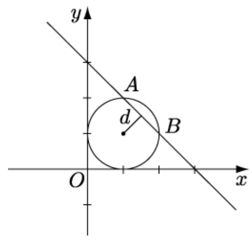
答案：$4; (-\frac{1}{2},1)$

解析：$4x^2+4x+1+4y^2-8y+4=-k+4$，$(2x+1)^2+(2y-2)^2=-k+4 \quad \therefore k=4$，點為$(-\frac{1}{2},1)$

17、直線 $x+y=3$ 截圓 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$於 A, B 兩點，求線段 $\overline{AB}$ 之長。

答案：圓心到直線的距離 $d=\frac{|1+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

則 $\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{1^2-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，故 $\overline{AB}=\sqrt{2}$



18、有一圓的圓心為$(-1, -2)$並且通過點$(-2, 2)$，求其方程式。

答案：由兩點距離公式知，圓的半徑 $r=\sqrt{(-2+1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{17}$

故圓的方程式為 $(x+1)^2+(y+2)^2=17$

19、設 $x=3\sin\theta-1,\ y=-3\cos\theta+2$ ， $0\le\theta\le 2\pi$ ，則點(x,y)之點集圖形方程式為______。

答案：$(x+1)^2+(y-2)^2=9$

解析：$(x+1)^2+(y-2)^2=(3\sin\theta)^2+(-3\cos\theta)^2=9 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=9$

20、若點 $P(x, y)$是單位圓上的點，求 $\sqrt{3}x+y$ 的最大值，此時 P 點坐標為何？

答案：單位圓方程式： $x^2+y^2=1$。

設 $P(x, y)$，其中$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$, $0\le\theta<2\pi$

則 $\sqrt{3}x+y=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta)$

$=2(\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta)=2\sin(\frac{\pi}{3}+\theta)$

當 $\frac{\pi}{3}+\theta=\frac{\pi}{2}$ 時，$\sqrt{3}x+y$ 有最大值 2。

此時 $\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$ ，故 $x=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ y=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ 。

21、設 $A(-1,3), B(-2,1)$為平面上兩定點，P 點在圓 $O: x^2+y^2=1$上，則 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最大值為______，最小值為______。

答案：11; 1

解析：設 $P(\cos\theta,\sin\theta)$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-1-\cos\theta,3-\sin\theta)\cdot(-2-\cos\theta,1-\sin\theta)$

$=\cos^2\theta+3\cos\theta+2+\sin^2\theta-4\sin\theta+3=3\cos\theta-4\sin\theta+6=5(\cos(\theta+\phi))+6$

最大值 11，最小值 1

22、若 P 為單位圓：$x^2+y^2=1$ 上的任一點，令 O 為原點，$Q(3,-2)$，則△POQ 的最大面積為________。

答案：令 $P(\cos\theta,\sin\theta)$

$\therefore$△POQ 面積$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\cos\theta & \sin\theta\\ 3 & -2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-2\cos\theta-3\sin\theta\right|=\frac{1}{2}\left|2\cos\theta+3\sin\theta\right|$

$\therefore -\sqrt{13}\le 2\cos\theta+3\sin\theta\le\sqrt{13}$，$\therefore$最大面積為$\frac{\sqrt{13}}{2}$。

23、設 $P(x,y)$為圓 $O:x^2+y^2=1$上的任一點，則$2x^2+2xy$ 的最大值為______，最小值為______。

答案：$\sqrt{2}+1;\ 1-\sqrt{2}$

解析：設$P(\cos\theta,\sin\theta)$

$\therefore 2x^2+2xy=2\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta=1+\cos 2\theta+\sin 2\theta=\sqrt{2}(\sin(2\theta+\frac{\pi}{4}))+1$

$\therefore$最大值為$\sqrt{2}+1$，最小值為$1-\sqrt{2}$

24、設 $P(x,y)$為圓 $O:x^2+y^2=25$ 上之任一點，則

(1) $x+y-2$ 的最大值為______，最小值為______，

(2) $\frac{xy}{25}+\frac{x}{5}+\frac{y}{5}$ 之最大值為______，最小值為______，

(3) $4x^2+2y^2$ 之最大值為______，最小值為______，

(4) $(x-6)^2+(y-2)^2+1$之最大值為______，最小值為______。

答案：(1) $5\sqrt{2}-2$；$-5\sqrt{2}-2$　(2) $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$；-1　(3)100, 50　(4) $66+20\sqrt{10}$；$66-20\sqrt{20}$

解析：設 $x=5\cos\theta,\ y=5\sin\theta$

(1) $x+y-2=5\cos\theta+5\sin\theta-2=5\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-2$

$\therefore$最大值$5\sqrt{2}-2$，最小值$-5\sqrt{2}-2$

(2) $\frac{xy}{25}+\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=\cos\theta\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta=\cos\theta\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta$

令$\sin\theta+\cos\theta=t$　$\therefore \sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$　且$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

$\frac{t^2-1}{2}+t=\frac{t^2+2t-1}{2}=\frac{(t+1)^2-2}{2}$，最小值$-1$，最大值$\frac{(\sqrt{2}+1)^2-2}{2}=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$

(3) $4x^2+y^2=4\times(25\cos^2\theta)+(25\sin^2\theta)\times 2$

$=50(1+\cos 2\theta)+25(1-\cos 2\theta)=75+25\cos 2\theta$

$-1\le\cos 2\theta\le 1$　$\therefore 50\le 4x^2+2y^2\le 100$

(4)平面上(6,2)到圓 O 之最近距離為$\sqrt{40}-5$，最遠為$\sqrt{40}+5$

$\therefore (x-6)^2+(y-2)^2+1$之最大值$(\sqrt{40}+5)^2+1=66+20\sqrt{10}$

$(x-6)^2+(y-2)^2+1$之最小值$(\sqrt{40}-5)^2+1=66-20\sqrt{20}$