高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.11.25					
範圍	3-2 行列式+Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 選擇題 (每題 10 分)

1、(C) 試判斷下列那一個行列式的值可以不爲 0？ (A)$\begin{vmatrix}4&6&8\\6&8&10\\8&10&12\end{vmatrix}$ (B)$\begin{vmatrix}0&1&2\\-1&0&3\\-2&-3&0\end{vmatrix}$

(C)$\begin{vmatrix}a-2b&b-2c&c-2a\\b-2c&c-2a&a-2b\\c-2a&a-2b&b-2c\end{vmatrix}$ (D)$\begin{vmatrix}a+b&b+c&c+a\\a&b&c\\b&c&a\end{vmatrix}$ (E)$\begin{vmatrix}1&5a&a+9\\1&5b&b+9\\1&5c&c+9\end{vmatrix}$

$\boxed{解析}$：$\because \begin{vmatrix}a-2b&b-2c&c-2a\\b-2c&c-2a&a-2b\\c-2a&a-2b&b-2c\end{vmatrix}=-7\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$

2、(C) 設 $f(x)=\begin{vmatrix}x+4&0&1\\-1&x-2&1\\3&5&x-1\end{vmatrix}$，則 $f(x)$除以 $x-3$ 所得之餘式爲何？ (A)–9 (B)–19 (C)–29 (D)–39 (E)–49

$\boxed{解析}$：餘式$=f(3)=\begin{vmatrix}7&0&1\\-1&1&1\\3&5&2\end{vmatrix}=14-5-3-35=-29$

3、(C) 下列何者恆爲真？ (A)$\begin{vmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c&f&i\\b&e&h\\a&d&g\end{vmatrix}$ (B)$\begin{vmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-b&d-e&g-h\\b-c&e-f&h-i\\c-a&f-d&i-g\end{vmatrix}$

(C)$\begin{vmatrix}a-b&d-e&g-h\\b-c&e-f&h-i\\c&f&i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{vmatrix}$ (D)$\begin{vmatrix}3a&3d&3g\\3b&3e&3h\\3c&3f&3i\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{vmatrix}$

(E)$\begin{vmatrix}g&a&d\\h&b&e\\i&c&f\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{vmatrix}$

4、(E) 行列式$\begin{vmatrix}1&a&bc\\1&b&ca\\1&c&ab\end{vmatrix}$之值與下列那一個行列式之值不相等？ (A)$\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}a&a^2&abc\\b&b^2&abc\\c&c^2&abc\end{vmatrix}$

(B)$\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}$ (C)$\begin{vmatrix}1&a&bc\\0&b-a&ca-bc\\0&c-a&ab-bc\end{vmatrix}$ (D)$(a-b)(b-c)(c-a)$ (E)$\begin{vmatrix}1&a^2&a^3\\1&b^2&b^3\\1&c^2&c^3\end{vmatrix}$

$\boxed{解析}$：$\begin{vmatrix}1&a&bc\\1&b&ca\\1&c&ab\end{vmatrix}=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}a&a^2&abc\\b&b^2&abc\\c&c^2&abc\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&a^2&1\\b&b^2&1\\c&c^2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$

$$=\begin{vmatrix}1 & a & bc\\0 & b-a & ca-bc\\0 & c-a & ab-bc\end{vmatrix}$$

二. 填充題 (每題 10 分)

5、坐標平面上，三直線 $L_1:3(a-1)x+2y=10$，$L_2:(a-2)x+y=3$，$L_3:(4a-5)x-3y=1$ 共點，則 $a=$______及公共點坐標為________。

答案：3 ; (1, 2)

解析：$\because L_1, L_2$ 與 L_3 三線共點

$$\therefore 0=\begin{vmatrix}3(a-1) & 2 & 10\\a-2 & 1 & 3\\4a-5 & -3 & 1\end{vmatrix}=3(a-1)-30(a-2)+6(4a-5)-10(4a-5)+27(a-1)-2(a-2)$$

$\therefore 0=-18a+54$，$\therefore a=3$

$$\therefore \begin{cases}3x+y=5\\x+y=3\\7x-3y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$$ $\therefore$交點坐標(1, 2)

6、行列式 $\begin{vmatrix}10 & 105 & 45\\8 & -28 & 36\\6 & 7 & 29\end{vmatrix}$ 之值 =______。

答案：-2240

7、設 $\begin{vmatrix}a & b & c\\p & q & r\\x & y & z\end{vmatrix}=2$，則 $\begin{vmatrix}7a-b+3c & -2b+3c & 5c\\7p-q+3r & -2q+3r & 5r\\7x-y+3z & -2y+3z & 5z\end{vmatrix}=$__________。

答案：-140

解析：原式 $=5\begin{vmatrix}7a-b+3c & -2b+3c & c\\7p-q+3r & -2q+3r & r\\7x-y+3z & -2y+3z & z\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}7a-b & -2b & c\\7p-q & -2q & r\\7x-y & -2y & z\end{vmatrix}=(-70)\begin{vmatrix}a & b & c\\p & q & r\\x & y & z\end{vmatrix}=-140$

8、設 $f(x)=\begin{vmatrix}2-x & 4 & -3\\2 & 1-x & 0\\1 & -1 & 3-x\end{vmatrix}$，若 $f(x)=0$ 之三根為 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 則 $\alpha+\beta+\gamma=$______, $\alpha\beta\gamma=$______。

答案：6; -9

解析：$\alpha+\beta+\gamma=2+1+3=6$，$\alpha\beta\gamma=f(0)=\begin{vmatrix}2 & 4 & -3\\2 & 1 & 0\\1 & -1 & 3\end{vmatrix}=-9$

9、求 $\begin{vmatrix}2 & -3 & 5\\4 & 9 & 25\\8 & -27 & 125\end{vmatrix}=$______。

答案：3600

解析：$\begin{vmatrix}2 & -3 & 5\\4 & 9 & 25\\8 & -27 & 125\end{vmatrix}=2\times(-3)\times5\times\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\2 & -3 & 5\\4 & 9 & 25\end{vmatrix}=(-30)\times(-5)\times8\times3=3600$

10、化簡$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\b+c & c+a & a+b\end{vmatrix}=$______。

答案：0

解析：$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\b+c & c+a & a+b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\a+b+c & a+b+c & a+b+c\end{vmatrix}=0$

11、設△ABC 的三頂點爲 $A(4,1), B(2,7), C(-1,2)$，則△ABC 的面積爲______。

答案：14

解析：$\overrightarrow{AB}=(-2,6)$，$\overrightarrow{AC}=(-5,1)$　$\therefore\triangle=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-2 & 6\\-5 & 1\end{matrix}\right\|=14$

12、空間中相異四點爲 $A(0,1,1), B(2,1,4), C(-3,2,1), D(0,2,2)$，則
(1)△ABC 的面積爲______，(2)四面體 $ABCD$ 的體積爲______。

答案：(1)$\frac{\sqrt{94}}{2}$　(2)$\frac{7}{6}$

解析：(1) $\overrightarrow{AB}=(2,0,3)$，$\overrightarrow{AC}=(-3,1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1,1)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-3,-9,2)$　$\therefore$△ABC 面積爲$=\frac{1}{2}\sqrt{9+81+4}=\frac{\sqrt{94}}{2}$

(2)四面體 $ABCD=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}2 & 0 & 3\\-3 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|(-3,-9,2)\cdot(0,1,1)\right|=\frac{7}{6}$

13、若$\begin{vmatrix}1 & a & d\\2 & b & e\\3 & c & f\end{vmatrix}=4$，則(1)$\begin{vmatrix}2a+3 & d & 1\\2b+6 & e & 2\\2c+9 & f & 3\end{vmatrix}=$______，(2)$\begin{vmatrix}2a+3 & d & a-2\\2b+6 & e & b-4\\2c+9 & f & c-6\end{vmatrix}=$______。

答案：(1)8　(2)-28

解析：(1)$\begin{vmatrix}2a+3 & d & 1\\2b+6 & e & 2\\2c+9 & f & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a & d & 1\\2b & e & 2\\2c & f & 3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & a & d\\2 & b & e\\3 & c & f\end{vmatrix}=8$

(2)$\begin{vmatrix}2a+3 & d & a-2\\2b+6 & e & b-4\\2c+9 & f & c-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a+3 & d & -2\\2b+6 & e & -4\\2c+9 & f & -6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2a+3 & d & a\\2b+6 & e & b\\2c+9 & f & c\end{vmatrix}=16+\begin{vmatrix}3 & d & a\\6 & e & b\\9 & f & c\end{vmatrix}$

$$=-16-3\begin{vmatrix}1 & a & d\\2 & b & e\\3 & c & f\end{vmatrix}=-28$$

14、設 a, b, c 表△ABC 之三邊長，(1)若$\begin{vmatrix} a & b+c & b \\ b & c+a & c \\ c & a+b & a \end{vmatrix}=0$，則△$ABC$ 之形狀爲______，(2)若$\begin{vmatrix} a & a^2 & a+b+c \\ b & b^2 & a+b+c \\ c & c^2 & a+b+c \end{vmatrix}=0$，則△$ABC$ 之形狀爲______。

答案：(1)正三角形　(2)等腰三角形

解析：(1)$\begin{vmatrix} a & b+c & b \\ b & c+a & c \\ c & a+b & a \end{vmatrix}=0$　$\therefore \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}=0$　$\therefore a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca]=0$　$\because a+b+c\neq 0$

$\therefore \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$　$\therefore a=b=c$　$\therefore$△ABC 爲正三角形

(2)若$\begin{vmatrix} a & a^2 & a+b+c \\ b & b^2 & a+b+c \\ c & c^2 & a+b+c \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}=0$

$=(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)=0$

$\because a+b+c\neq 0$，$\therefore a=b$ 或 $b=c$ 或 $c=a$　$\therefore$△ABC 爲等腰三角形

15、空間中有三向量$\overrightarrow{OA}=(3,1,-1)$, $\overrightarrow{OB}=(0,2,1)$, $\overrightarrow{OC}=(1,4,2)$，則由此三向量所張的平行六面體的體積爲______。

答案：3

解析：$\left\|\begin{matrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{matrix}\right\|=3$

16、設α, β 爲 $x^2-4x+2=0$之二根，則$\begin{vmatrix} \alpha & 3 & \beta \\ 3 & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & 3 \end{vmatrix}=$______。

答案：-49

解析：$\begin{vmatrix} \alpha & 3 & \beta \\ 3 & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & 3 \end{vmatrix}=(3\alpha\beta)\times 3-\beta^3-\alpha^3-27=-49$

$\because \alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$　$\therefore$　$\alpha^2+\beta^2=12$，　$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

17、化簡$\begin{vmatrix} x+y & z & z \\ x & y+z & x \\ y & y & x+z \end{vmatrix}=$______。

答案：$4xyz$

$\boxed{解析}$：$\begin{vmatrix} x+y & z & z \\ x & y+z & x \\ y & y & x+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(x+y) & 2(y+z) & 2(z+x) \\ x & y+z & x \\ y & y & x+z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ -y & 0 & -z \\ -x & -z & 0 \end{vmatrix}$

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & z \\ x & z & 0 \end{vmatrix} = 4xyz$$

18、試求四頂點爲 $A(-1, -3, 3), B(2, 1, -4), C(1, -4, 17), D(0, -1, -12)$的三角錐之體積_____。

$\boxed{答案}$：$\overrightarrow{DA} = (-1,\ -2,\ 15),\quad \overrightarrow{DB} = (2,\ 2,\ 8),\quad \overrightarrow{DC} = (1,\ -3,\ 29)$

$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 15 \\ 2 & 2 & 8 \\ 1 & -3 & 29 \end{vmatrix} = -102$，此三角錐之體積爲$\dfrac{1}{6}|\Delta| = 17$。

19、設 $A(3, 2), B(-1, 1), C(k, k+6)$，(1)若△$ABC$ 面積爲$\dfrac{7}{2}$，求 k=________

(2)若 A, B, C 共線，求 k=________

$\boxed{答案}$：$\overrightarrow{AB} = (-4,-1)$，$\overrightarrow{AC} = (k-3, k+4)$，$\therefore \triangle ABC = \dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ k-3 & k+4 \end{vmatrix}\right| = \dfrac{1}{2}|3k+19|$

(1) $\dfrac{1}{2}|3k+19| = \dfrac{7}{2} \Rightarrow 3k+19 = \pm 7 \Rightarrow k = -4$ 或 $-\dfrac{26}{3}$

(2) $\dfrac{1}{2}|3k+19| = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{19}{3}$

20、若 a, b, c 表△ABC 之三邊長，且$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = 0$，則△$ABC$ 是何種三角形？_______

$\boxed{答案}$：

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} (-1) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (b-a)(c-a)(c^2+ca+a^2-b^2-ab-a^2) = 0$

$\Rightarrow (b-a)(c-a)(c-b)(c+b+a) = 0$，$\therefore b-a=0$ 或 $c-a=0$ 或 $c-b=0$

$\therefore b=a$ 或 $c=a$ 或 $c=b$，$\therefore$△ABC 爲等腰三角形。

21、解方程式$\begin{vmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 1 & 4-x & 1 \\ -2 & -4 & -1-x \end{vmatrix} = 0$

$\boxed{答案}$：

$$\begin{vmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 1 & 4-x & 1 \\ -2 & -4 & -1-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-x & 2-x & 2-x \\ 1 & 4-x & 1 \\ -2 & -4 & -1-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4-x & 0 \\ -2 & -4 & -1-x \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} (-1) \\ (+2) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow (2-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & -2 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-x)(3-x)(1-x) = 0 \Rightarrow x = 1,\ 2,\ 3$$

22、解不等式 $\begin{vmatrix} -1 & a & 3 \\ 3 & 1 & a+3 \\ a-1 & 4 & 9 \end{vmatrix} \le 0$

答案：$\begin{vmatrix} -1 & a & 3 \\ 3 & 1 & a+3 \\ a-1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = a^3 + 2a^2 - 29a + 42$，$(a-2)(a-3)(a+7) \le 0$ $\therefore a \le -7$ 或 $2 \le a \le 3$

23、試證 $\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix} = 4abc$

答案：

$$\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix} (-1) = \begin{vmatrix} 0 & -2b & -2a \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix} (\tfrac{1}{2})$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2b & -2a \\ a & c & 0 \\ b & 0 & c \end{vmatrix} = 2abc + 2abc = 4abc$$