高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.11.18					
範圍	3-13 克拉瑪公式 +Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 選擇題 (每題 10 分)

1、(D) 聯立方程式$\begin{cases}2x-y-z=0\\3x+y-4z=0\\5x-2y+mz=0\end{cases}$ 若除(0,0,0)外尚有其他解時，則常數$m=$ (A)2 (B)−2 (C)3 (D)−3 (E)4

解析：除(0,0,0)外尚有其他解，即無線多解，$\begin{vmatrix}2&-1&-1\\3&1&-4\\5&-2&m\end{vmatrix}=0$，$5(m+3)=0$ $\therefore m=-3$

2、(B) 下列那一組方程組有無限多組解？ (A)$\begin{cases}x-2y=2\\3x+6y=6\end{cases}$ (B)$\begin{cases}3x+12y+6=0\\4x+16y=-8\end{cases}$ (C)$\begin{cases}2x+3=4y\\4x+6=5y\end{cases}$ (D)$\begin{cases}5y=7\\5x=7\end{cases}$ (E)$\begin{cases}x+2y=3\\2y+4x=6\end{cases}$

3、(B) 設$9x+3y+z=31,\ 3x+y+9z=48,\ x+9y+3z=41$，則$x=$
(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 (E)5

解析：$\begin{cases}9x+3y+z=31\\x+9y+3z=41\end{cases}$ $\therefore(27-1)x=93-41$ $\therefore x=2$

4、(B) 若$\begin{cases}\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{y}+1=0\\ax+by-4=0\end{cases}$ 與$\begin{cases}\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{y}-4=0\\3ax-4by-26=0\end{cases}$ 有相同的解，則$2a+b=$？
(A)0 (B)10 (C)20 (D)40 (E)80

解析：$\begin{cases}\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{y}=-1\\\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{y}=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$代入

$\therefore\begin{cases}2a-\dfrac{1}{2}b=4\\6a+2b=26\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a-b=8\\3a+b=13\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a=3\\b=4\end{cases}$

$\therefore 2a+b=2\times3+4=10$

5、(A) 設方程組$\begin{cases}6x+(a-2)y-7a+17=0\\(a+5)x-2y+8a+24=0\end{cases}$無解，則$a=$？ (A)−2 (B)−1 (C)0 (D)1 (E)2

解析：$\because$方程組無解，$\therefore\dfrac{6}{a+5}=\dfrac{a-2}{-2}\neq\dfrac{-7a+17}{8a+24}$

$\therefore a^2+3a-10=-12\Rightarrow a^2+3a+2=0$

$\therefore a=-2$或-1（代入不合，$\because\dfrac{6}{4}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{24}{16}$）

二. 填充題 (每題 10 分)

6、利用克拉瑪公式解方程組$\begin{cases}21x+22y+27z=50\\22x+23y+28z=51\\23x+24y+25z=52\end{cases}$，$(x, y, z) =$______。

答案：$(-28, 29, 0)$

7、設三平面$2x+ay-z=1, 4x-3y+3z=5, 3x+y+z=b$相交於一直線$L$，則$a=$______, $b=$______。

答案：5; 3

解析：$\begin{vmatrix}2 & a & -1\\4 & -3 & 3\\3 & 1 & 1\end{vmatrix}=0 \quad \therefore a=5$，$\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\4 & 5 & 3\\3 & b & 1\end{vmatrix}=0 \quad \therefore b=3$

8、方程組$\begin{cases}5x+2y+3z=5\\2x+5y-z=-2\\x-3y-2z=13\end{cases}$的解為$x=$______, $y=$______。

答案：3; –2

解析：$\begin{cases}5x+2y+3z=5\\2x+5y-z=-2\\x-3y-2z=13\end{cases}$，$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=3$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=-2$，$z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=-2$

9、三年一班男女同學共有 48 人，男生的平均分數是 76 分，女生的平均分數是 82 分，又全班平均分數是 81 分，則班上男生有________人，女生有________人。

答案：8; 40

解析：設男生 x 人，女生 y 人；$\begin{cases}x+y=48\\76x+82y=81(x+y)\end{cases}$，$\therefore x=8$, $y=40$

男生 8 人，女生 40 人

10、若方程組$\begin{cases}5x+3y-z=-1\\2x+y+2z=a\\x+4y+bz=10\end{cases}$有無限多解，求$a-b=$________。

答案：40

解析：方程組有無限多組解

$\therefore \Delta=\begin{vmatrix}5 & 3 & -1\\2 & 1 & 2\\1 & 4 & b\end{vmatrix}=0=5b-8+6+1-40-6b$，$\therefore b=-41$

$\Delta_z=\begin{vmatrix}5 & 3 & -1\\2 & 1 & a\\1 & 4 & 10\end{vmatrix}=0=50-8+3a+1-20a-60$，$\therefore a=-1$

$\therefore a-b=-1-(-41)=40$

11、設矩陣A的元素a_{ij}定義為$a_{ij}=2i-j^2-1, i=1,2,3,\ j=1,2$，則$A=$__________。

答案：$\begin{bmatrix}0 & -3\\2 & -1\\4 & 1\end{bmatrix}$

解析：$a_{11}=2-1-1=0$，$a_{12}=2-4-1=-3$

$a_{21}=4-1-1=2$，$a_{22}=4-4-1=-1$

$a_{31}=6-1-1=4$，$a_{32}=6-4-1=1$

$$\therefore A=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 2 & -1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

12、方程組$\begin{cases}2x+3y+z=k\\ kx-y-3z=2\\ 3x+(k-3)y-z=3\end{cases}$，則

(1)當$k=$______時方程組有無限多組解，

(2)當$k=$______時方程組無解。

答案：(1) 4　(2) –10

解析：$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ k & -1 & -3\\ 3 & k-3 & -1\end{vmatrix}=0$，$(k+10)(k-4)=0$　$\therefore k=4$ 或 -10

當$k=4\begin{cases}2x+3y+z=4\cdots\cdots①\\ 4x-y-3z=2\cdots\cdots②\\ 3x+y-z=3\cdots\cdots③\end{cases}$，①+②$\Rightarrow 6x+2y-2z=6$　∴有無限多組解

當$k=-10\begin{cases}2x+3y+z=-10\\ -10x-y-3z=2\\ 3x-13y-z=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x-10y=-7\\ -4x+8y=-28\end{cases}$　∴無解

13、甲乙丙三人合作一工程，甲乙二人合作 20 天可完工，乙丙二人合作 10 天可完工，而甲丙二人合作 12 天可完工，則甲獨作________日可完工，乙獨作________日可完工。

答案：60; 30

解析：設甲獨作 x 天可完工，乙獨作 y 天可完工，丙獨作 z 天可完工

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20}\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12}\end{cases}\quad\therefore \frac{1}{x}=\frac{1}{60},\ \frac{1}{y}=\frac{1}{30},\ \frac{1}{z}=\frac{1}{15}$$

$\therefore x=60$，$y=30$，$z=15$，甲獨作 60 天可完工，乙獨作 30 天可完工

14、解方程組$\begin{cases}\dfrac{4}{2x+5y+1}+\dfrac{3}{x+y+1}=1\\ \dfrac{6}{2x+5y+1}+\dfrac{4}{x+y+1}=1\end{cases}$，則$2x+5y+1=$________，又$y=$________。

答案：–2; –1

解析：令$\dfrac{1}{2x+5y+1}=A,\dfrac{1}{x+y+1}=B$

$\begin{cases}4A+3B=1\\6A+4B=1\end{cases}$ $A=-\dfrac{1}{2},\ B=1$，$\therefore 2x+5y+1=-2,\ x+y+1=1$，$\therefore x=1,\ y=-1$

15、解方程組$\begin{cases}4x+3y+z=2\\x+y+z=-1\\3x+2y=3\end{cases}$ 則其解爲 ______。

答案：$\begin{cases}x=1-2t\\y=3t\\z=-2-t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

解析：$\because \begin{cases}x+y+z=-1\\-y-3z=6\\-y-3z=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1-2t\\y=3t\\z=-2-t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

16、解方程組$\begin{cases}2x-y-z=1\\x+2y+z=2\\x-8y-5z=4\end{cases}$ 則其解爲 ______。

答案：無解

解析：$\begin{cases}x+2y+z=2\\-10y-6z=2\\-5y-3z=-3\end{cases}$ $\therefore$無解

17、若兩方程組$\begin{cases}x+2y-z=-8\\ax+y+z=5\\2x-y+z=11\end{cases}$ 與$\begin{cases}2x+by-z=1\\x-2y+3z=12\\2x+y-cz=15\end{cases}$有相同解，求數對$(a,b,c)=$________。

答案：$(4,1,15)$

解析：$\begin{cases}x+2y-z=-8\\x-2y+3z=12\\2x-y+z=11\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=3\\y=-6\\z=-1\end{cases}$代入，$\therefore \begin{cases}6-6b+1=1\\3a-6-1=5\\6-6+c=15\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=4\\b=1\\c=15\end{cases}$，$\therefore (a,b,c)=(4,1,15)$

18、設三平面$x+2y-z=ax$，$3x+y+3z=0$，$2x+4y+az=0$恰相交於一直線時，求 $a=$________。

答案：2 或 5

解析：$\because$三平面相交於一直線

$\therefore \Delta=\begin{vmatrix}1-a & 2 & -1\\3 & 1 & 3\\2 & 4 & a\end{vmatrix}=0=a(1-a)-12+12+2-12(1-a)-6a$

$\therefore a^2-7a+10=0$，$\therefore a=2$或5。

19、若方程組$\begin{cases}x+y+2z=4\\3x-2y+z=b\\3x-7y+az=-2\end{cases}$ 有無限多組解，則$a=$______，$b=$______。

答案：-4; 5

解析：$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&2\\3&-2&1\\3&-7&a\end{vmatrix}=0 \quad \therefore a=-4$，$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&1&4\\3&-2&b\\3&-7&-2\end{vmatrix}=0 \quad \therefore b=5$

20、設聯立方程組$\begin{cases}2x-3y=3\\2bx+ay=8\end{cases}$與$\begin{cases}4x+5y=17\\ax-by=5\end{cases}$，有相同的解$x=\alpha,\ y=\beta$，則數對$(\alpha,\beta)=$_______；又數對$(a,b)=$________。

答案：$(3,1)$; $(2,1)$

解析：$\begin{cases}2x-3y=3\\4x+5y=17\end{cases} \quad \therefore y=1,\ \ x=3 \quad \therefore (\alpha,\beta)=(3,1)$

$\begin{cases}3a-b=5\\a+6b=8\end{cases} \quad \therefore b=1,\ \ a=2 \quad \therefore (a,b)=(2,1)$

21、若$xyz\neq 0$且滿足$\begin{cases}x+3y+5z=0\\2x+4y+7z=0\end{cases}$，求$\dfrac{x^2+3y^2+5z^2}{2x^2+4y^2+4z^2}$之值爲______。

答案：$\dfrac{8}{9}$

解析：$x:y:z=\begin{vmatrix}3&5\\4&7\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}5&1\\7&2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}=1:3:(-2)$

令$x=t,\ y=3t,\ z=-2t$，$\therefore \dfrac{x^2+3y^2+5z^2}{2x^2+4y^2+4z^2}=\dfrac{t^2+27t^2+20t^2}{2t^2+36t^2+16t^2}=\dfrac{48}{54}=\dfrac{8}{9}$

22、根據調查，在華人社會，身高 H 公尺，體重 W 公斤的人中，其平均體表面積 S 平方公尺，可以用數學模型$S=aH+bW-0.01$來表示，這裡的 a,b 是常數。又知體重一樣，身高多 5 公分，平均體表面積會增加 0.03 平方公尺；而身高一樣，體重多 4 公斤，平均體表面積會增加 0.05 平方公尺。根據模型，身高 170 公分，體重 64 公斤，應該有 ______ 平方公尺的平均體表面積。

答案：1.81

解析：

$S_1=aH+bW-0.01$

$S_1+0.03=a(H+0.05)+bW-0.01$

$0.05a=0.03 \therefore a=0.6$

同理

$S_2=aH+bW-0.01$

$S_2+0.05=aH+b(W+4)-0.01$

$0.05=4b \therefore b=0.0125$

所求$=0.6\times1.7+0.0125\times64-0.01=1.81$

23、設x,y,z滿足$3x+y-z=3,\ x-y+2z+4=0$，則$z^2-2x+2y$之最小值爲______；此時$x=$______。

答案：4; $\dfrac{1}{4}$

解析：$\begin{cases}3x+y-z=3\\x-y+2z+4=0\end{cases} \quad \therefore x=t,\ y=2-7t,\ z=-1-4t$

$\therefore z^2-2x+2y=16t^2-8t+5=(4t-1)^2+4\geq 4$，$\therefore$最小值 4，此時 $x=t=\dfrac{1}{4}$

24、解 $\begin{cases} x+4y=6xy \\ 2x+3y=7xy \end{cases}$，則 $(x,y)=$__________或__________。

答案：$(0,0)$; $(1,\dfrac{1}{2})$

解析：若 $x=0$，$y=0$ 爲一組解

若 $x\neq 0,\ y\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{x}=6 \\ \dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{x}=7 \end{cases}$ $\therefore x=1,\ y=\dfrac{1}{2}$