高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.11.11					
範圍	2-5 空間之直線方程式 2+Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 填充題 (每題 10 分)

1、設平面 E，包含直線 $L:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ 並且垂直平面 $F: x-2y+z=5$，則平面 E 之方程式為_________。

答案：$4x+y-2z+11=0$

解析：$(2,-2,3)\times(1,-2,1)=(4,1,-2)$　　$\therefore$平面 E 之方程式為 $4x+y-2z+11=0$

2、試求過點 $A(3,2,-1)$而與直線 $L:\begin{cases}x+3y-1=0\\3y+z-2=0\end{cases}$ 垂直的平面 E 之方程式。

答案：平面 E 之法線方向比＝直線 L 之方向比 $=\begin{vmatrix}3&0\\3&1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&3\\0&3\end{vmatrix}=3:-1:3$

平面 E 之方程式為 $3(x-3)-(y-2)+3(z+1)=0$，即 $3x-y+3z-4=0$

3、試求過點 $P(1, 2, 3)$而與直線 $L_1:\begin{cases}x+y-z=0\\3x+y+2z+1=0\end{cases}$ 平行的直線 L_2 之對稱比例式。

答案：L_2 之方向比=L_1 之方向比 $=\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1&1\\2&3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}=3:-5:-2$

L_2 之對稱比例式為 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z-3}{-2}$。

4、 若兩直線 $L_1:\begin{cases}x+y+z=3\\x-y+2z=2\end{cases}$, $L_2:\begin{cases}2x-y-z=0\\ax+2y+3z=0\end{cases}$ 交於一點 P，求 a 值及交點 P 之坐標。

答案：

$$L_1:\begin{cases}x+y+z=3\cdots\cdots①\\x-y+2z=2\cdots\cdots②\end{cases}$$

$$L_2:\begin{cases}2x-y-z=0\cdots\cdots③\\ax+2y+3z=0\cdots\cdots④\end{cases}$$

由①, ②, ③解得 $x=1,\ y=1,\ z=1$，交點為 $P(1, 1,1)$，代入④得 $a=-5$

5、 設 $A(2,-2,4)$, $B(3,0,1)$，點 P 在平面 E: $2x-y+2z=5$ 上，則 P 點坐標為何時，可使 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 最小，又其最小值為何？

答案：A 對平面 E 之對稱點 A' 為

$$\left(2-\frac{2\times2\times9}{2^2+(-1)^2+2^2},-2-\frac{2\times(-1)\times9}{2^2+(-1)^2+2^2},4-\frac{2\times2\times9}{2^2+(-1)^2+2^2}\right)=(-2,0,0)$$

$\overrightarrow{AB}=(5,0,1)\Rightarrow \overleftrightarrow{AB}: x=-2+5t,\ y=0,\ z=t$

$\overleftrightarrow{AB}$ 與平面 E 之交點為 $2(-2+5t)+2t=5$　　$\therefore t=\dfrac{3}{4}$

$\therefore P$ 點為 $(\dfrac{7}{4},0,\dfrac{3}{4})$　，$\overline{PA}+\overline{PB}$ 最小值為 $\overline{A'B}=\sqrt{26}$

6、若 $A(3, 1, -1)$, $B(2, 5, 3)$, $C(x, y, -5)$三點共線，試求 x,y 之值。

答案：$\overrightarrow{AB}=(2-3,\ 5-1,\ 3+1)=(-1,\ 4,\ 4)$，得$\begin{cases}x=3-t\\y=1+4t\\-5=-1+4t\end{cases}$，則$t=-1,\ \ x=4,\ \ y=-3$。

7、試求兩直線$L_1:\begin{cases}x+y-z=0\\y+z=0\end{cases}$, $L_2:\begin{cases}x-y=1\\x-3y+z=2\end{cases}$的夾角。

答案：L_1之方向比爲$\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix}=2:-1:1$

L_2之方向比爲$\begin{vmatrix}-1 & 0\\-3 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & -3\end{vmatrix}=-1:-1:-2=1:1:2$

設L_1, L_2所夾之銳角爲θ，則$\cos\theta=\dfrac{|2\times1-1\times1+1\times2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\dfrac{1}{2}$,$\theta=60^\circ$

故L_1, L_2的夾角爲60°或120°。

8、試求線段$\begin{cases}x=3+4t\\y=-2-3t,\quad -1\le t\le 5\\z=1+12t\end{cases}$的長度及其中點的坐標。

答案：$t=-1\Rightarrow(-1,1,-11)$；$t=5\Rightarrow(23,-17,61)$

此線段之長度爲$\sqrt{(23+1)^2+(-17-1)^2+(61+11)^2}=6\sqrt{4^2+(-3)^2+12^2}=78$

令$t=\dfrac{-1+5}{2}=2$，得中點之坐標爲$(3+4\times2,\ -2-3\times2,\ 1+12\times2)=(11,\ -8,\ 25)$

9、 設平面E與平面$x+4y-3z=4$及$2x-3y+z=11$相交於一直線，又平面E與平面$3x-y=4$互相垂直，則平面方程式爲何？

答案：設平面$E:k(x+4y-3z-4)+(2x-3y+z-11)=0$

$(k+2)x+(4k-3)y+(-3k+1)z+(-4k-11)=0$

$\therefore(k+2,4k-3,-3k+1)\cdot(3,-1,0)=0\quad\therefore k=9$

$\therefore$平面E爲$11x+33y-26z-47=0$

10、試求兩歪斜線$L_1:\begin{cases}x=19+8t\\y=12+5t,\quad t\in\mathbb{R}\\z=3+t\end{cases}$，及$L_2:\begin{cases}x=2+2k\\y=1-3k\quad,\ k\in\mathbb{R}\\z=23-4k\end{cases}$的距離。

答案：L_1過$A(19,12,3)$, L_2過$B(2,1,23)$，$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(-17,\ -11,\ 20)$

L_1之方向比爲$8:5:1$;L_2之方向比爲$2:-3:-4$

L_1，L_2之公垂方向比爲$\begin{vmatrix}5 & 1\\-3 & -4\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 8\\-4 & 2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}8 & 5\\2 & -3\end{vmatrix}=1:-2:2$

取L_1，L_2之公垂向量$\vec{b}=(1,-2,2)$,

L_1，L_2之距離爲$\vec{a}$在$\vec{b}$上之正射影長$=\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\dfrac{|-17+22+40|}{\sqrt{1+4+4}}=15$。

11、兩歪斜線$L_1:\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-12}{1}=\dfrac{z-4}{4}$, $L_2:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+5}{1}=\dfrac{z}{1}$，則其公垂線$L$之對稱比例式爲何？又兩歪斜線間的距離爲何？

$\boxed{答案}$：設P在L_1上，$P(-2t-2,t+12,4t+4)$，Q在L_2上，$Q(3s+2,s-5,s)$

$\overrightarrow{PQ}\cdot(-2,1,4)=0,\ \overrightarrow{PQ}(3,1,1)=0$

$\therefore 11s+t-9=0,\ s+21t+41=0$，$\therefore s=1,\ t=-2$

$\therefore P(2,10,-4),\ Q(5,-4,1)$，　$\therefore \overleftrightarrow{PQ}:\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+4}{-14}=\dfrac{z-1}{5}$，$d(P,Q)=\sqrt{230}$

12、設 $A(1, 2, 3), B(2, 1, 0), C(0, 0, 0)$，求過△$ABC$ 之重心且與平面 ABC 垂直的直線對稱比例式。

$\boxed{答案}$：△ABC 之重心爲$\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=(1, 1, 1), \overrightarrow{CA}=(1, 2, 3), \overrightarrow{CB}=(2, 1, 0)$

設所求直線的方向向量爲$\overrightarrow{n}$

$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{CA}\\ \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{CB}\end{cases}\Rightarrow \therefore$取$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}=\left(\begin{vmatrix}2&3\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&1\\0&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\right)=(\ -3，6，-3\ )$

取$(1，(-2)，1)\Rightarrow \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$

13、設$L_1:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{1-y}{6}=\dfrac{z-5}{2}, L_2:\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{1-y}{2}=\dfrac{3-z}{2}$

(1)求包含L_1且平行L_2的平面？

(2)求L_1, L_2的最近距離？

$\boxed{答案}$：(1)設平面 E 包含L_1與L_2平行，令$\overrightarrow{n}=(a, b, c)$

$\therefore \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v_1}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v_2}$，$\overrightarrow{v_1}=(1,-6,2)$，$\overrightarrow{v_2}=(3,-2,-2)$

$\therefore a：b：c=\begin{vmatrix}-6&2\\-2&-2\end{vmatrix}：\begin{vmatrix}2&1\\-2&3\end{vmatrix}：\begin{vmatrix}1&-6\\3&-2\end{vmatrix}=16：8：16=2：1：2$

$\therefore$取$(2,1,2)$，$\therefore E：2x+y+2z=k$ 過L_1上的點 $A(3, 1, 5)$代入

$\therefore k=6+1+10=17$，$\therefore E：2x+y+2z=17$

(2)點 $B(-4, 1, 3)$在L_2上，$d(L_1, L_2)=d(B, E)=\left|\dfrac{-8+1+6-17}{\sqrt{4+1+4}}\right|=6$

14、試驗證：$L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{1}, L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$兩直線歪斜。

$\boxed{答案}$：(1)兩方向向量$(1, 2, 1)\not\parallel(2, 2, 1)$，故兩直線非重合且非平行

(2)令$L_1:\begin{cases}x=1+t\\ y=2+2t\\ z=-3+t\end{cases}$，代入$L_2$，$\dfrac{1+t-1}{2}=\dfrac{2+2t-1}{2}=\dfrac{-3+t-1}{1}$

$\because \dfrac{t}{2}=\dfrac{2t+1}{2}\Rightarrow t=-1$，$\dfrac{2t+1}{2}=\dfrac{t-4}{1}\Rightarrow t$ 無解，故 t 無解，表L_1，L_2不相交

由(1), (2)知，L_1, L_2歪斜。

15、試求含直線$L_1:\begin{cases}6x+4y+3z+5=0\\ 2x+y+z-2=0\end{cases}$而與直線$L_2:\begin{cases}2x+y-1=0\\ x+2z+1=0\end{cases}$平行的平面之方程式。

$\boxed{\text{答案}}$：所求平面之方程式為$(6x+4y+3z+5)+k(2x+y+z-2)=0$

即$(6+2k)x+(4+k)y+(3+k)z+(5-2k)=0$，其法向量為$\overrightarrow{n}=(6+2k,\ 4+k,\ 3+k)$

L_2之方向比為$\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}0&2\\2&1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}=2:-4:-1$

取L之方向向量$\overrightarrow{v}=(2,\ -4,\ -1)$，

此時$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}=2(6+2k)-4(4+k)-(3+k)=0\Rightarrow 7+k=0$，$k=-7$ ，

得所求平面之方程式為$8x+3y+4z-19=0$

16、試求點$P(2,1,0)$對於直線$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-3}{3}$的對稱點之坐標。

$\boxed{\text{答案}}$：此直線上有一點$A(1,4,3)$

$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AP}=(2-1,\ 1-4,\ 0-3)=(1,\ -3,\ -3)$，$\overrightarrow{b}=(1,\ 2,\ 3)$

所求之對稱點為Q，$\dfrac{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}}{2}=\dfrac{(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{b}|^2}\overrightarrow{b}\Rightarrow\overrightarrow{AQ}=\dfrac{2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{b}|^2}\overrightarrow{b}-\overrightarrow{AP}$

$Q=A+\dfrac{2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{b}|^2}\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}=(1,\ 4,\ 3)+\dfrac{2(1-6-9)}{1^2+2^2+3^2}(1,\ 2,\ 3)-(1,\ -3,\ -3)=(-2,\ 3,\ 0)$

17、設空間中直線$L:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{3}$與平面$E:x-2y+z=3$，若直線$L$在平面$E$上之投影為直線$L'$，直線$L$與平面$E$相交於$P$，則(1)$P$點坐標為________，(2)求包含直線$L$及$L'$之平面方程式為________，(3)直線$L'$之方向向量為$(a,2,b)$，則$a=$________, $b=$________。

$\boxed{\text{答案}}$：$(-7,-8,-6)$, $9x-y-11z=11$; $\dfrac{23}{10}$; $\dfrac{17}{10}$

$\boxed{\text{解析}}$：$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{3}=t$ $\quad\therefore(4t+1)-2(3t-2)+(3t)=3$，$\therefore t=-2\quad\therefore P(-7,-8,-6)$

$(4,3,3)\times(1,-2,1)=(9,-1,-11)$

$\therefore$包含L及L'之平面法向量為$(9,-1,-11)$，其方程式為$9x-y-11z=11$

直線L'之方向向量為$(9,-1,-11)\times(1,-2,1)=(-23,-20,-17)$

$(a,2,b)//(-23,-20,-17)\quad\therefore a=\dfrac{23}{10},\ b=\dfrac{17}{10}$

18、設空間中兩點$A(-4,2,5)$, $B(5,5,-1)$與直線$L:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+5}{-2}$在$L$上找一點$P$，使$\overline{PA}+\overline{PB}$最小，則$P$點坐標為何？又此時$\overline{PA}+\overline{PB}$之最小值為何？

$\boxed{\text{答案}}$：A對直線L之投影點為$A'(2t+3,-t,-2t-5)$

$(2t+7,-t-2,-2t-10)\cdot(2,-1,-2)=0\quad\therefore t=-4$，$\quad\therefore A'(-5,4,3)$且$\overline{AA'}=3$

B對直線L之投影點為$B'(2s+3,-s,-2s-5)$

$(2s-2,-s-5,-2s-4)\cdot(2,-1,-2)=0\quad\therefore s=-1\quad\therefore B'(1,1,-3)$, $\overline{BB'}=6$

$\therefore P$在$\overline{A'B'}$上且$\overline{PA'}:\overline{PB'}=1:2$，$\therefore P(-3,3,1)$，$\overline{PA}+\overline{PB}=\sqrt{18}+\sqrt{72}=9\sqrt{2}$

19、設△ABC的三頂點為$A(3,2,2)$, $B(1,-1,4)$, $C(t,s,1-t-s)$，則△ABC周長之最小值為何？又

此時 C 點坐標爲何？

$\boxed{\text{答案}}$：C 點落在 $x+y+z=1$ 之平面 E 上

A 對平面 E 之對稱點 A' 爲 $(3-\frac{2\times1\times6}{1^2+1^2+1^2},2-\frac{2\times1\times6}{1^2+1^2+1^2},2-\frac{2\times1\times6}{1^2+1^2+1^2})=(-1,-2,-2)$

$\overline{A'B}=(1+1,-1+2,4+4)=(2,1,6)$ ，$\overleftrightarrow{A'B}: x=1+2t,\ y=-1+t,\ z=4+6t$

$\overleftrightarrow{A'B}$ 與平面 E 之交點爲 C，$1+2t+(-1+t)+4+6t=1$ ，$t=-\frac{1}{3}$ $\quad\therefore C(\frac{1}{3},-\frac{4}{3},2)$

$\triangle ABC$ 周長最小值爲 $\overline{AB}+\overline{A'B}=\sqrt{17}+\sqrt{41}$

20、設二點 $A(3,1,2), B(4,3,3)$ 和一直線 $L: x=t+1$， $y=1$， $z=-t+2$ ，若點 P 在直線 L 上移動，則當 P 點坐標爲何時，$\triangle PAB$ 的面積最小？又其最小面積爲何？

$\boxed{\text{答案}}$：直線 AB 與 L 爲歪斜線，爲使$\triangle PAB$ 面積最小，故 P 到直線 L 之距離要最小，因此 P 爲此對歪斜線之公垂線與 L 之交點。

$P(t+1,1,-t+2)$ ，設 Q 在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上，$Q(3+s,1+2s,2+s)$

$\overrightarrow{PQ}\cdot(1,0,-1)=0,\ \overrightarrow{PQ}\cdot(1,2,1)=0 \quad \therefore t=1,\ 6s+2=0$

$s=-\frac{1}{3} \quad \therefore P(2,1,1),\ Q(\frac{8}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}),\ \overline{PQ}=\frac{2\sqrt{3}}{3},\ \overline{AB}=\sqrt{6}$

$\therefore \triangle PAB=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\sqrt{2}$