高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.10.28					
範圍	2-4 平面方程式+Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 單一選擇題 (每題 10 分)

1、(B) 過點 $A(4,2,-1)$而與 zx 平面平行之平面方程式可爲 (A) $x=4$ (B) $y=2$ (C) $z=-1$ (D) $x+z=3$ (E) $x+y+z=5$

解析：∵與 zx 平面平行 ∴平面法向量爲(0,1,0)

2、(B) 一平面通過(1,2,1)並通過二平面 $x+2y-3z=0$ 與 $x-y+z=1$ 的交線，則此平面的方程式爲 (A) $3x-2z=1$ (B) $3x-z=2$ (C) $2x-z=1$ (D) $x+y+z=4$

解析：設平面爲 $(x+2y-3z)+k(x-y+z-1)=0$，代入(1,2,1)得 $2-k=0$

$\therefore k=2$ ∴平面爲 $3x-z=2$

3、(BDE) (複選)下列哪些選項與方程組 $\begin{cases}2x+y+3z=0\\4x+3y+6z=0\end{cases}$ 的解集合相同？ (A) $y=0$

(B) $\begin{cases}2x+3z=0\\y=0\end{cases}$ (C) $x=y=0$ (D) $\begin{cases}x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z=0\\4x+3y+6z=0\end{cases}$ (E) $\begin{cases}6x+4y+9z=0\\2x+y+3z=0\end{cases}$

解析：(A) $y=0$ 爲一平面，故不可能。

(B)∵題目中 $\begin{cases}2x+y+3z=0\cdots①\\4x+3y+6z=0\cdots②\end{cases}$

②−①×2 $\Rightarrow y=0$ 代入① $\Rightarrow 2x+3z=0$ ∴解集合爲 $\begin{cases}y=0\\2x+3z=0\end{cases}$ 與(B)同.

(C)∵解集合不同

(D) $\begin{cases}x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z=0\cdots①\\4x+3y+6z=0\end{cases}$,①×2 $\Rightarrow \begin{cases}2x+y+3z=0\\4x+3y+6z=0\end{cases}$ 與原方程組同

(E) $\begin{cases}6x+4y+9z=0\cdots①\\2x+y+3z=0\cdots②\end{cases}$,①−②×3 $\Rightarrow y=0$ 代入② $\Rightarrow 2x+3z=0$

因此解集合爲：$\begin{cases}2x+3z=0\\y=0\end{cases}$ 與(B)同

4、(AD) (複選)設二平面 $E_1: x+ky+z=0$ 與 $E_2: x+\sqrt{2}y-z+1=0$ 的夾角爲 $\frac{\pi}{3}$，求 $k=$？

(A) $\sqrt{2}$ (B)1 (C)2 (D) $-\sqrt{2}$ (E) -2

解析：$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}=\left|\frac{1+\sqrt{2}k-1}{\sqrt{1+k^2+1}\cdot\sqrt{1+2+1}}\right| \Rightarrow k^2+2=2k^2$，$\therefore k=\pm\sqrt{2}$

二. 填充題 (每題 10 分)

5、設空間中有一平面 $E: 2x-y+3z=7$，及兩點 $A(1,3,2)$, $B(-2,1,5)$，若直線 AB 交平面 E 於 C，則 $\overline{AC}:\overline{BC}=$ ________ 。

答案：2 : 3

解析：$\overline{AC}:\overline{BC}=d(A,E):d(B,E)=\frac{|2-3+6-7|}{\sqrt{14}}:\frac{|-4-1+15-7|}{\sqrt{14}}=2:3$

6、過 $A(1, 0, 2)$, $B(0,-2, 3)$, $C(1,-5,-3)$三點之平面方程式爲________ 。

答案：$3x-y+z=5$

解析：令 $\overrightarrow{AB}=(-1,-2,1)$，$\overrightarrow{AC}=(0,-5,-5)=5(0,-1,-1)$

$$\therefore \begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}\Rightarrow\therefore\text{取}\ \vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}-2&1\\-1&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-1\\-1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&-2\\0&-1\end{vmatrix}\right)=(3,-1,1)$$

$\therefore E:3(x-1)-(y-0)+(z-2)=0$，$\therefore E:3x-y+z=5$

7、若 $P(1,3,5)$到平面 $E:3x-6y+2z=d$ 的距離為 4，則 $d=$________。

答案：23 或-33

解析：$\dfrac{|3-18+10-d|}{\sqrt{3^2+(-6)^2+2^2}}=4,\ |d+5|=28,\ d=23\text{或}-33$

8、試求 yz 平面與 $2x+2y-z=4$ 的角平分面方程式為________。

答案：$5x+2y-z=4$ 或 $x-2y+z+4=0$

解析：yz 平面方程式為 $x=0$

$\Rightarrow \dfrac{|x|}{1}=\dfrac{|2x+2y-z-4|}{3}\pm(3x)=2x+2y-z-4$

$\therefore 5x+2y-z=4$ 或 $x-2y+z+4=0$

9、設點 $A(3,1,-1)$，平面 $E:x-2y+z=4$，則 A 在平面 E 上之投影點為________，對稱點為________。

答案：$(\frac{11}{3},\frac{-1}{3},-\frac{1}{3})$；$(\frac{13}{3},\frac{-5}{3},\frac{1}{3})$

解析：$A(3,1,-1)$，代入平面 $E:x-2y+z-4=0\Rightarrow t=3-2-1-4=-4$

投影點$\left(3-\dfrac{1\times1\times(-4)}{1^2+(-2)^2+1^2},1-\dfrac{1\times(-2)\times(-4)}{1^2+(-2)^2+1^2},-1-\dfrac{1\times1\times(-4)}{1^2+(-2)^2+1^2}\right)=(\frac{11}{3},\frac{-1}{3},\frac{-1}{3})$

對稱點$\left(3-\dfrac{2\times1\times(-4)}{1^2+(-2)^2+1^2},1-\dfrac{2\times(-2)\times(-4)}{1^2+(-2)^2+1^2},-1-\dfrac{2\times1\times(-4)}{1^2+(-2)^2+1^2}\right)=(\frac{13}{3},-\frac{5}{3},\frac{1}{3})$

10、設θ為平面 $x-2y+z=7$ 與 $kx-y-2z=11$ 的夾角，若 $\sin\theta=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$，則 $k=$________或________。

答案：±2

解析：$\cos\theta=\dfrac{(1,-2,1)\cdot(k,-1,-2)}{\sqrt{6}\sqrt{k^2+5}}=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{9},k=\pm2$

11、若 A 為 $5x-y-2z=3$ 平面上的一點，又點 $P(3,1,-2)$為平面外一點，則 $\overline{AP}$ 距離之最小值為________，又此時 A 點坐標為________。

答案：$\dfrac{\sqrt{30}}{2}$；$(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1)$

解析：$P(3,1,-2)$，代入平面 E: $5x-y-2z-3=0\Rightarrow t=15-1+4-3=15$，$P$ 到平面之投影為

$\left(3-\dfrac{1\times5\times15}{5^2+(-1)^2+(-2)^2},1-\dfrac{1\times(-1)\times15}{5^2+(-1)^2+(-2)^2},-2-\dfrac{1\times(-2)\times15}{5^2+(-1)^2+(-2)^2}\right)=(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1)$

$\overline{AP}=\dfrac{15}{\sqrt{30}}=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$

12、設 $A(2,5,1)$在平面 E 上，且平面 E 與二平面$3x-y+5z=7$，$x-y+2z=11$均垂直，則平面 E 的方程式爲________。

答案：$3x-y-2z+1=0$

解析：取$\vec{n}=(3,-1,5)\times(1,-1,2)=(3,-1,-2)$　　$3x-y-2z+1=0$

13、設 $P(3,1,1)$, $Q(1,0,-4)$, $R(3,4,0)$，若平面 E 通過 P 點且直線 QR 垂直平面 E，則平面 E 的方程式爲________。

答案：$x+2y+2z=7$

解析：取$\vec{n}=\overrightarrow{QR}=(2,4,4)$,　$\therefore x+2y+2z=7$

14、設平面 E 平行 z 軸且通過$(2,-3,1)$與$(1,1,7)$，則平面 E 的方程式爲________。

答案：$4x+y=5$

解析：$\because$平面 E 平行 z 軸　$\therefore E: ax+by=k$　且向量$(2-1,-3-1,1-7)=(1,-4,-6)$

$(a,b,0)\cdot(1,-4,-6)=0$　$\therefore a-4b=0$，取$a=4$，$b=1$　，$4x+y=5$

15、設平面 E: $2x-y+2z=3$，若平面 F 與平面 E 平行，且與平面 E 之距離爲 2，則平面 F 之方程式爲________或________。

答案：$2x-y+2z=9$；$2x-y+2z=3$

解析：設平面 F：$2x-y+2z=k$　$d(E,F)=\dfrac{|3-k|}{\sqrt{9}}=2$　$\therefore |k-3|=6,\ k=9$或-3

即方程式爲$2x-y+2z=9,\ 2x-y+2z=3$

16、由 $A(3,1,1)$對平面 E 的投影點爲$(1,2,1)$，則平面 E 的方程式爲________。

答案：$2x-y=0$

解析：法向量$(3-1,1-2,1-1)=(2,-1,0)$　$\therefore$平面 E 爲$2x-y=0$

17、設$E_1: x+ky+z-12=0$, $E_2: x+y+kz=5$，求

(1)若$E_1\perp E_2$時，則$k=$______。(2)若E_1與E_2之夾角爲 60°時，求$k=$______。

答案：(1) $-\dfrac{1}{2}$　(2) 0 或 4 或-2

解析：$\overrightarrow{n_1}=(1,k,1),\overrightarrow{n_2}=(1,1,k)$

(1)$\because E_1\perp E_2$, $\therefore \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=1+k+k=0$, $\therefore k=-\dfrac{1}{2}$

(2)$\cos 60^{\circ}=\dfrac{1}{2}=\left|\dfrac{1+k+k}{\sqrt{1+k^2+1}\cdot\sqrt{1+1+k^2}}\right|\Rightarrow k^2+2=\pm 2(1+2k)$

$\therefore k^2-4k=0$ 或 $k^2+4k+4=0$，$\therefore k=0$ 或 4 或-2。

18、設平面 E 上有兩點 $A(2,-3,1)$, $B(4,1,2)$且平面 E 與平面 F: $7x-y+2z=5$垂直，則平面 E 的方程式爲________。

答案：$3x+y-10z=-7$

解析：　$\overline{AB}=(2,4,1)$　又$\overline{n_F}=(7,-1,2)$

$\therefore$取平面 E 法向量$\overline{AB}\times\overline{n_F}=3(3,1,-10)$　$\therefore$平面 E: $3x+y-10z=-7$

19、平面E_1: $3x+y+2kz=5$與平面E_2: $kx-2y+kz=1$互相垂直，則$k=$________或________。

答案：$\dfrac{1}{2}$; -2

解析：$E_1 \perp E_2$, $(3,1,2k)\cdot(k,-2,k)=0 \quad \therefore k=\dfrac{1}{2}$或$-2$

20、設平面E_1: $2x-4y+3z=11$，平面E_2: $4x+ay+bz=5$，平面E_3: $3x+y-cz=7$，若平面$E_1 // E_2$，則$a=$________, $b=$________；若平面$E_2 \perp E_3$，則$c=$________。

答案：$-8; 6; \dfrac{2}{3}$

解析：$E_1 // E_2 \quad \therefore \dfrac{2}{4}=\dfrac{-4}{a}=\dfrac{3}{b} \quad \therefore a=-8,\ b=6$

$E_2 \perp E_3 \quad \therefore E_3 \perp E_1 \quad \therefore (2,-4,3)\cdot(3,1,-c)=0,\ c=\dfrac{2}{3}$

21、設平面 E 與平面$2x-2y+z=9$平行且與三坐標軸之截距和為 12，則平面 E 的方程式為________。

答案：$2x-2y+z=12$

解析：設平面 E: $2x-2y+z=k \quad \therefore$交三軸於$(\dfrac{k}{2},0,0),(0,-\dfrac{k}{2},0),(0,0,k)$三點

$\therefore \dfrac{k}{2}+(-\dfrac{k}{2})+k=12 \Rightarrow k=12 \quad \therefore$平面 E: $2x-2y+z=12$

22、若空間中有三點 $A(3,1,0)$, $B(1,5,2)$, $C(5,2,1)$，則平面 ABC 的方程式為________，又$\triangle ABC$ 的面積為________，若點 $D(1,0,a)$落在平面 ABC 上，則$a=$________。

答案：$x+3y-5z=6$; $\sqrt{35}$; -1

解析：(1) $\overrightarrow{AB}=(-2,4,2),\ \overrightarrow{AC}=(2,1,1),\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2,6,-10) \quad \therefore$平面 ABC 為$x+3y-5z=6$,

(2)$\triangle ABC$ 面積$=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{35}$ (3) $D(1,0,a)$代入平面 ABC，$1-5a=6$，$a=-1$

23、設 $A(-2,1,4)$, $B(4,3,2)$，則$\overline{AB}$的垂直平分面方程式為________。

答案：$3x+y-z=2$

解析：$\overline{AB}$之中點$(1,2,3)$ 取$\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(6,2,-2)=2(3,1,-1) \quad \therefore$平面為：$3x+y-z=2$

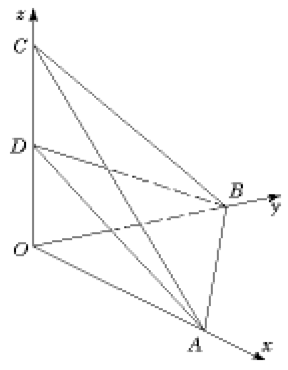
24、試求過點 $A(1,-2,1)$與二平面$E_1: x+2y-z+1=0,\ E_2: x-y+z-1=0$均垂直的平面之方程式。

答案：E_1之法向量$\overrightarrow{n_1}=(1,\ 2,\ -1)$，$E_2$之法向量$\overrightarrow{n_2}=(1,\ -1,\ 1)$

$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$之公垂向量為$\left(\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right)=(1,-2,-3)$

所求平面之方程式為$x-2y-3z-2=0$

25、在下圖的空間坐標中，O 為原點，點 A, B, C 分別位於 x 軸、y 軸、z 軸上，$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 且 D 為$\overline{OC}$的中點，求 O 到平面 ABC 與 O 到平面 ABD 的距離之比。



答案：設 $A(k,0,0)$, $B(0,k,0)$, $C(0,0,k)$, $D(0,0,\dfrac{k}{2})$

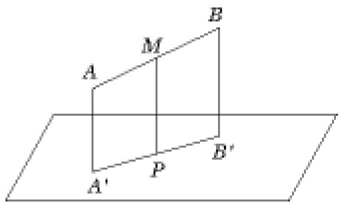
平面 ABC 為$\dfrac{x}{k}+\dfrac{y}{k}+\dfrac{z}{k}=1 \quad \therefore x+y+z=k$

平面 ABD 為 $\dfrac{x}{k}+\dfrac{y}{k}+\dfrac{z}{\frac{k}{2}}=1 \quad \therefore x+y+2z=k$

$O(0,0,0)$, $d(O$，平面 $ABC)$：$d(O$，平面 $ABD)=\dfrac{|k|}{\sqrt{3}}:\dfrac{|k|}{\sqrt{6}}=\sqrt{2}:1$

26、設 $A(1,-2,4)$, $B(5,0,2)$在平面 $E: 2x-y+2z=4$ 上找一點 P 使 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 值最小，則其最小值為何？又此時 P 點坐標為何？

答案：



在平面 E 上使 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 最小值之 P 點為 $\overline{AB}$ 中點 $(3,-1,3)$ 對平面 E 之投影點，$M(3,-1,3)$對平面之投影點 $(1,0,1)$

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2^2+3^2+4^2+1^2=30$

27、設平面 E 通過點$(1,3,4)$且在第一卦限與 xy, yz, zx 平面所圍出之錐體體積最小，則平面 E 之方程式為何？又此最小體積為何？

答案：設平面 $E:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{4}{c}=1$ 且 $a>0,\ b>0,\ c>0$

平面 E 在第一卦限所圍出之錐體體積為 $\dfrac{1}{6}abc$

又 $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}}{3}\geq\sqrt[3]{\dfrac{12}{abc}} \quad \therefore \dfrac{abc}{6}\geq 54$，等號成立時 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{3}{b}=\dfrac{4}{c}=\dfrac{1}{3}$，$a=3,\ b=9,\ c=12$

最小體積為 54，平面 E 為 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{9}+\dfrac{z}{12}=1$

28、有三個向量 $\overrightarrow{v_1}=(a_1,b_1,c_1)$, $\overrightarrow{v_2}=(a_2,b_2,c_2)$, $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，都不是零向量。其中 $\overrightarrow{v_1}$ 與 $\overrightarrow{v_2}$ 不平行，但都與 $\overrightarrow{n}$ 垂直，試求 x：y：z。

答案：

由 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v_1}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v_2}$，知 $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v_1}=0$ 且 $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v_2}=0$。即 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0\cdots\cdots①\\ a_2x+b_2y+c_2z=0\cdots\cdots②\end{cases}$

因為 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)\neq\overrightarrow{0}$，所以 x,y,z 不皆為 0。假設 $z\neq 0$，

故① $\times\, b_2-$ ② $\times\, b_1$ 得 $(a_1b_2-a_2b_1)x+(b_2c_1-b_1c_2)z=0$, $x=\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}z$

② $\times\, a_1-$ ① $\times\, a_2$，得 $(a_1b_2-a_2b_1)y+(c_2a_1-c_1a_2)z=0$, $y=\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}z$

故 x：y：z $=\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}z$ ：$\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}z$ ：$z=(b_1c_2-b_2c_1):(c_1a_2-c_2a_1):(a_1b_2-a_2b_1)$