高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：93.09.30
範圍	1-4 向量	班級		姓名	
		座號			

一. 選擇題 (每題 5 分)

1、(B) 設 L_1, L_2 為二直線，E_1, E_2 為二平面，$L_1 \subset E_1$ 且 $L_2 \subset E_2$，則下列各敘述何者恆正確？

(A)若 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$，則 $L_1 // L_2$　(B)若 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ 且 L_1 與 L_2 共面，則 $L_1 // L_2$

(C)若 E_1 與 E_2 有一交線，則 $L_1 // L_2$　(D)若 $L_1 // L_2$，則 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$

(E)若 $L_1 \perp L_2$，則 $E_1 \perp E_2$

解析：(A)（╳）：不一定，可能為歪斜。

(B)（○）。

(C)（╳）：不一定，可能為歪斜或相交。

(D)（╳）：不一定，可能相交一直線。

(E)（╳）：不一定，可能相交一直線。

故選(B)。

2、(E) 在空間中，下列敘述何者為真？

(A)平行於同一平面的兩條相異直線必互相平行

(B)相異三點可決定唯一的平面

(C)過直線 L 外一點 P 有無限多條直線與 L 垂直

(D)設直線 L 與平面 E 相交於 P 點，若 E 上有一條通過 P 點的直線與 L 垂直，則 L
與 E 垂直

(E)作一組兩兩距離均相等的點，則這組點在空間中最多可有四點

3、(B) 設 L_1, L_2 為二直線，且 L_1, L_2 均垂直 L 於點 P，則下列各敘述何者恆不真？

(A) $L_1 = L_2$　(B) $L_1 // L_2$　(C) $L_1 \perp L_2$　(D) L_1 不垂直於 L_2　(E) L_1, L_2 可決定一平面

解析：$\because$ L_1 與 L_2 均垂直 L 於 P

$\therefore$①在平面上時，$L_1 = L_2$

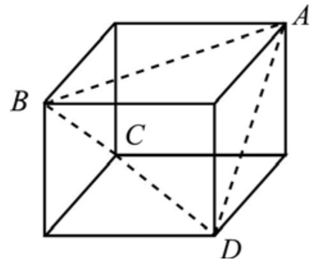
②在空間上時，$L_1 \perp L_2$ 或 L_1 不垂直於 L_2 且 L_1 與 L_2 可決定一平面，故答案為(B)。

4、(B) 一正立方體的八個頂點中有四個頂點，各頂點彼此之間的距離都是 1，則此正立方體的體積為 (A) $2\sqrt{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(C)1 (D)2

解析：設邊長為 l,

則取 4 個頂點 A, B, C, D 彼此距離均為 1

$\therefore \overline{AB} = \sqrt{2}l = 1 \Rightarrow l = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\therefore$體積$=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, 故選(B)



5、(AC DE) 下列敘述何者正確？ (複選)

(A)垂直同一平面之相異兩直線必平行　(B)平行同一直線之相異兩平面必平行

(C)垂直同一直線之相異兩平面必平行　(D)平行同一直線之相異兩直線必平行

(E)相異三平面 E_1, E_2, E_3 兩兩相交於不同的三直線 L_1, L_2, L_3，若 $L_1 // L_2$ 則 $L_2 // L_3$

解析：(B)平行同一直線的相異兩平面可能相交於一直線

6、(CD) 在空間中，兩條歪斜線在平面上的投影圖形有下列哪幾種？（複選） (A)二平行

線 (B)重合二直線 (C)一直線與線外一點 (D)相交於一點的二直線 (E)一點

解析：投影圖形為二平行線或一直線與線外一點或相交於一點的二直線。

7、(AC) 下列敘述何者正確？ (複選)

(A)平行同一平面之相異兩平面必平行 (B)垂直同一平面之相異兩平面必平行

(C)平面E_1平行平面E，平面E_2垂直平面E，則平面E_1垂直平面E_2

(D)垂直同一直線的相異兩直線必平行 (E)平行同一平面的相異兩直線必平行

解析：(B)此二平面可能相交於一直線

(C)垂直於同一直線之二直線，可能為歪斜線

(D)平行同一平面的二直線可能相交於一點，或是歪斜

8、(AB) 平面E上有直線L及線外一點B，A在平面外一點，下列敘述何者正確？(複選)

(A)若$\overline{AB}\perp$平面E，$\overline{BC}\perp L$於C則$\overline{AC}\perp L$於C

(B)若$\overline{AB}\perp$平面E，$\overline{AC}\perp L$於C則$\overline{BC}\perp L$於C

(C)若$\overline{BC}\perp L$於C且$\overline{AC}\perp L$於C則$\overline{AB}\perp$平面E

(D)若$\overline{BC}\perp L$於C，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$，$D$為$L$上異於$C$之點，則$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2$ (E)若$\overline{AC}\perp L$於C，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$於$B$，則$\overline{AB}\perp$平面$E$

解析：∵若$\overline{BC}\perp L$於C，$\overline{AC}\perp L$於C且$\overline{AB}\perp\overline{BC}$於$B$，則$\overline{AB}\perp$平面$E$。

9、(ADE) 下列敘述何者正確？（複選）

(A)在平面上，若兩相異直線不相交，則它們必平行

(B)在空間中，若兩相異直線不相交，則它們必平行

(C)在平面上，任意兩相異直線一定有公垂線（仍在該平面上）

(D)在空間中，任意兩相異直線一定有公垂線

(E)在空間中，相交的兩相異平面一定有公垂面（公垂面是指與該兩平面皆垂直的平面）

解析：(A)（○）。 (B)（╳）：可能為歪斜。 (C)（╳）：可能不在同一平面。

(D)（○）。 (E)（○）。

故應選(A)(D)(E)。

10、(BDE) 下列敘述何者正確？(複選)

(A)相異三點決定唯一平面 (B)一線及線外一點，決定唯一平面

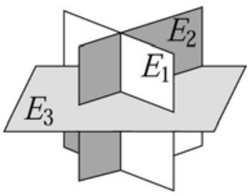
(C)不相交的兩直線，決定唯一平面 (D)兩平行線，決定唯一平面

(E)相交於一點的兩直線，決定唯一平面

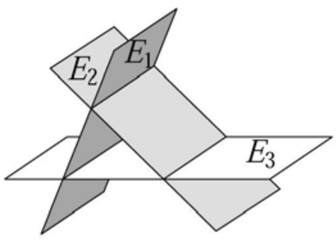
解析：(A)相異不共線三點，決定唯一平面；(C)歪斜線，不共平面

11、(CDE) 三相異平面兩兩相交於三條相異直線l_1, l_2, l_3。試問下列選項哪些絕不可能發生？ (A)l_1, l_2, l_3三線共交點 (B)l_1, l_2, l_3不共面，但$l_1 // l_2 // l_3$ (C)l_1, l_2, l_3共平面 (D)l_1, l_2, l_3兩兩相交，但三交點相異 (E)l_1, l_2, l_3三線中兩兩都是歪斜線

解析：∵圖形如下，圖一表三直線l_1,l_2,l_3共交點，圖二表l_1,l_2,l_3兩兩平行



圖一



圖二

12、(ACD) 下列敘述何者正確？

(A)一直線上若有相異二點A, B都在一平面E上，則L上的每一點，都在平面E上

(B)空間中，給予一直線L及線上一點P，恰有一直線通過P點且垂直L

(C)設一直線L交一平面E於一點P，若$L \perp E$於P，則E上過P的任一直線都垂直於L

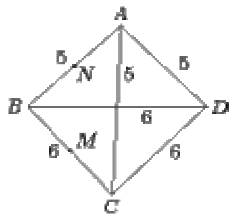
(D)一直線L及線外一點P，恰有一平面通過P點，且與直線L垂直

(E)設一直線L交一平面E於一點P，若在E上有一直線L_1過P點，且$L_1 \perp L$則$L \perp E$

解析：(B)過一線L與線上一點P，在空間中有無限多條直線通過P與L垂直。

(E)E上要有 2 條相異直線L_1, L_2且$L_1 \perp L$，$L_2 \perp L$則$L \perp E$

二、 填充題 (每題 10 分)



1、直三角錐 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=5$，$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{BD}=6$，若平面$ABC$與平面$ABD$之夾角為$\alpha$，平面$ABC$與平面$BCD$的夾角為$\beta$，則$\cos\alpha=$______，$\cos\beta=$______。

答案：$\frac{7}{32}$; $\frac{\sqrt{3}}{4}$

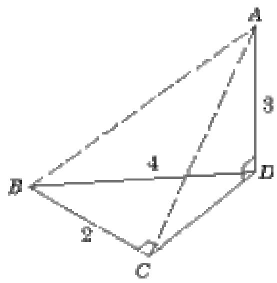
解析：$\overline{BC}$之中點M，$\overline{AM}=4$且$\overline{AM}\perp\overline{BC}$, $\overline{DM}=3\sqrt{3}$且$\overline{DM}\perp\overline{BC}$

$\therefore \beta=\angle AMD$，$\therefore \cos\beta=\frac{16+27-25}{2\cdot 4\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

過C作$\overline{CN}\perp\overline{AB}$於$N$　$\because \triangle ABC\cong\triangle ABD$

$\therefore \overline{DN}\perp\overline{AB}$　$\therefore \overline{BN}=3.6, \overline{CN}=\overline{DN}=4.8$，

$\therefore \alpha=\angle CND$　$\therefore \cos\alpha=\frac{(\frac{24}{5})^2+(\frac{24}{5})^2-36}{2\cdot(\frac{24}{5})(\frac{24}{5})}=\frac{7}{32}$

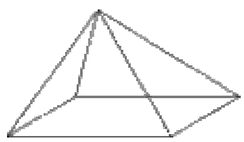


2、三角錐 $ABCD$ 中，$\overline{AD}\perp$平面 BCD 且 $\overline{BC}\perp\overline{CD}$，若$\overline{AD}=3$, $\overline{BD}=4$, $\overline{BC}=2$，則$\overline{AC}=$_______；又平面ABC與平面DBC之夾角為θ，則$\sin\theta=$_______。

答案：$\sqrt{21}$; $\frac{3}{\sqrt{21}}$

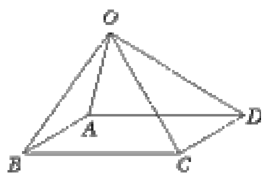
解析：$\because \overline{CD}=2\sqrt{3}$，$\therefore \overline{AC}=\sqrt{9+12}=\sqrt{21}$，$\because \overline{AC}\perp\overline{BC}$

$\therefore \theta=\angle ACD$，$\therefore \sin\theta=\frac{3}{\sqrt{21}}$



3、如圖，有一個稜長均為 2 的金字塔形，設其正三角形的斜面中相鄰之二面的夾角為α，正三角形的斜面與正方形的底面之夾角為β，則$\cos\alpha=$_______，$\cos\beta=$_______。

答案：$\frac{-1}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$



解析：取$\overline{OC}$中點M　$\therefore \overline{BM}\perp\overline{OC}$, $\overline{DM}\perp\overline{OC}$

$\therefore \angle BMD=\alpha$，$\overline{BM}=\sqrt{3}$, $\overline{DM}=\sqrt{3}$, $\overline{BD}=2\sqrt{2}$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{3+3-8}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{-1}{3}$$

取 $\overline{CD}$ 中點 E，$\overline{AB}$ 中點 F $\quad \therefore \overline{EF}\perp\overline{CD},\ \overline{OE}\perp\overline{CD}$

$$\therefore \beta = \angle OEF,\ \overline{OE}=\sqrt{3},\ \overline{EF}=2,\ \overline{OF}=\sqrt{3}\ ,\ \therefore \cos\beta = \frac{3+4-3}{2\sqrt{3}\times 2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

4、有一四面體 $OABC$，它的一個底面 ABC 是邊長爲 4 的正三角形，且知 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=a$；如果直線 OA 與直線 BC 間的公垂線段長(亦即此兩直線間的距離)是 $\sqrt{3}$，則 $a=$______ (以最簡分數表示)。

答案：$\dfrac{8}{3}$

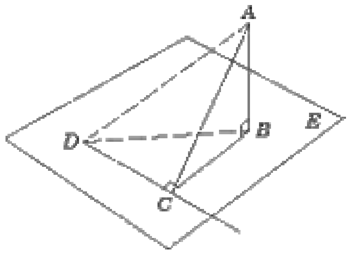
解析：取 $\overline{BC}$ 的中點 M,作 $\overline{MN}\perp\overline{OA}$,則 $\overline{MN}$ 爲 $\overline{OA}$ 的公垂線段長，$\therefore \overline{MN}=\sqrt{3}$

$\because \overline{AM}=2\sqrt{3},\ \overline{MN}=\sqrt{3}$，，$\therefore \angle OAM = 30^\circ$

$$\cos 30^\circ = \frac{a^2+12-(a^2-4)}{2\cdot a\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{8}{3}$$

5、設 $\overline{AB}$ 垂直平面 E 於 B，平面 E 上有 C, D 兩點且 $\overline{BC}\perp\overline{CD}$ 於 C(1)若 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{BD}=5$，則 $\overline{AD}=$______，(2)若 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CD}=12$，則 $\overline{AD}=$______。

答案：$\sqrt{34}$, 13

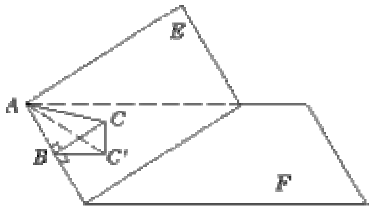


解析：(1)$\because \overline{AB}\perp$ 平面 E $\quad \therefore \overline{AB}\perp\overline{BD}$，$\therefore \overline{AD}=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$

(2)由三垂線定理知 $\overline{AC}\perp\overline{CD},\ \overline{AB}=3,\ \overline{BC}=4,\ \overline{AB}\perp\overline{BC}$ $\quad\therefore$ $\overline{AC}=5$，又 $\overline{CD}=12\ \therefore \overline{AD}=13$

6、設二平面 E, F 相交於直線 AB，且兩平面交角爲 $60°$，在平面 E 上有一點 C，且 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$，若 $\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=4$，則 $\overline{BC}$ 在平面 F 之投影長爲______；又 $\overline{AC}$ 在平面 F 之投影長爲______。

答案：2; $\sqrt{13}$



解析：$\because \overline{BC}=4,\ \angle CBC'=60°$

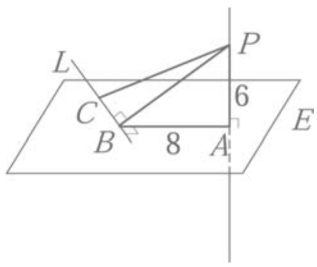
$\therefore \overline{BC'}=2$，$\overline{BC}$ 在平面 F 之投影長爲 2

$\because \overline{AC}=5,\ \overline{BC}=4$ $\quad \therefore \overline{AB}=3$，由三垂線定理得知

$\overline{BC'}\perp\overline{AB}$ $\quad \therefore \overline{AC'}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\therefore \overline{AC}$ 在平面 F 之投影長爲 $\sqrt{13}$

7、自平面 E 外一點 P 作 $\overline{PA}\perp E$，L 爲 E 上的直線，作 $\overline{AB}\perp L$，C 爲 L 上的一點，已知 $\overline{AP}=6,\ \overline{AB}=8,\ \overline{BC}=24$，求 $\overline{PC}=$______。



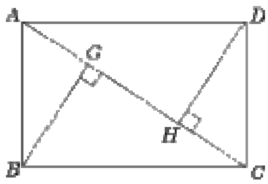
答案：26

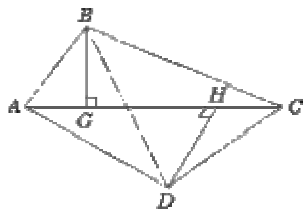
解析：$\because \overline{PA}\perp E$ 且 $\overline{AB}\perp L$，$\therefore \overline{PB}\perp L$，$\therefore \overline{PB}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，$\because$ $\overline{BC}=24$，$\therefore \overline{PC}=\sqrt{24^2+10^2}=26$

8、一長方形紙片 $ABCD$，$\overline{AB}=15,\ \overline{AD}=20$，沿著對角線 $\overline{AC}$ 摺起，使平面 BAC 與平面 DAC 互相垂直，則此時 B, D 兩點間的距離爲______；又 $\angle BCD=\theta$，則 $\cos\theta=$______。

答案：$\sqrt{337}$；$\dfrac{12}{25}$

解析：





$\because \overline{AB}=15,\ \overline{AD}=20 \quad \therefore \overline{DH}=12,\ \overline{CH}=9,\ \overline{GH}=7$

$\therefore \overline{BD}=\sqrt{\overline{BG}^2+\overline{GH}^2+\overline{DH}^2}=\sqrt{12^2+7^2+12^2}=\sqrt{337}$

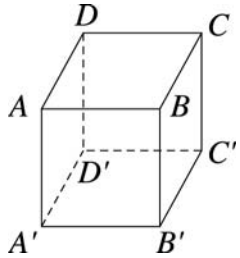
$\because \overline{BC}=20,\ \overline{CD}=15$，$\therefore \cos\theta=\dfrac{400+225-337}{2\times 20\times 15}=\dfrac{12}{25}$

9、空間中有一點 A，在平面 E 上的投影為 B，在平面 E 上有 $C,\ D$ 兩點且 $\overline{BC}\perp\overline{CD}$ 於 C，若 $\overline{AD}=13,\ \overline{CD}=5,\ \overline{BC}=4$，則 $\overline{AB}=$________。

答案：$8\sqrt{2}$

解析：由三垂線定理知 $\overline{AC}\perp\overline{CD} \quad \therefore \overline{AC}=12$，又 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$

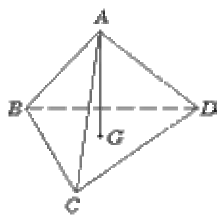


10、如圖，$ABCD-A'B'C'D'$ 為正立方體的八個頂點。試問下列各線段：$\overline{BC'}$，$\overline{AC}$，$\overline{DB'}$，$\overline{DD'}$，$\overline{CD'}$ 與 $\overline{A'B}$ 共平面的有______個。

答案：2

解析：共平面的線段有 $\overline{BC'}$ 及 $\overline{CD'}$ 共 2 個。

11、正四面體 $ABCD$，$\overline{AB}=2$，則正四面體的高為________，又其體積為________。

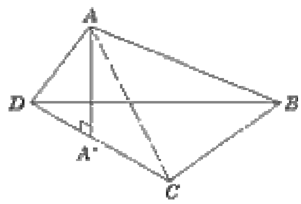


答案：$\dfrac{2\sqrt{6}}{3};2\sqrt{2}$

解析：$\overline{AG}\perp$ 平面 BCD，G 為△BCD 的重心

$\therefore \overline{BG}=\sqrt{3}\times\dfrac{2}{3},\ \overline{AB}=2 \quad \therefore \overline{AG}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，體積 $=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{2}$

12、長方形紙 $ABCD$，$\overline{AB}=4$，$\overline{AD}=3$，沿著對角線 $\overline{BD}$ 摺起，使 A 點在平面 BCD 上之投影恰在 $\overline{CD}$ 邊長，則此時 A、C 兩點間的距離為________。



答案：$\sqrt{7}$

解析：設 A 在平面 BCD 上之投影點為 A'，A' 在 $\overline{CD}$ 邊上

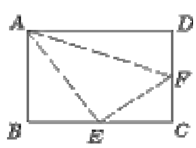
$\overline{AA'}$ 平面 BCD，又 $\overline{A'C}\perp\overline{CB} \quad \therefore \overline{AC}\perp\overline{CB}$

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{7}$

13、正方形紙片 $ABCD$，$\overline{AB}=10$，E,F 分別為 $\overline{BC},\ \overline{CD}$ 的中點，以 $\overline{AE},\ \overline{AF},\ \overline{EF}$ 為摺線往上摺，使 B,C,D 三點合而為一，可形成一四面體，則此四面體的體積為________。

答案：$\dfrac{125}{3}$

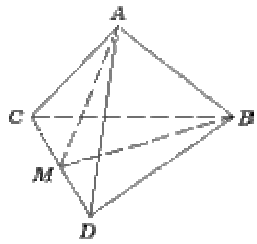
解析：設 B,C,D 三點合於一點 O，$\therefore \overline{OA}\perp\overline{OF},\ \overline{OA}\perp\overline{OE},\ \overline{OE}\perp\overline{OF}$



$\therefore OAEF$ 的四面體體積 $=\dfrac{1}{6}\times\overline{OE}\times\overline{OF}\times\overline{OA}=\dfrac{1}{6}\times5\times5\times10=\dfrac{125}{3}$

14、正四面體 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=4$，若平面 ACD 與平面 BCD 的夾角爲 θ，則 $\cos\theta=$________。

答案：$\dfrac{1}{3}$



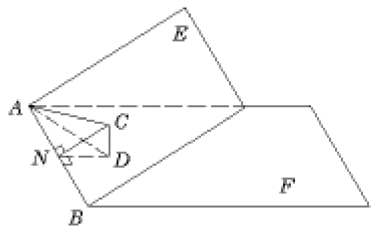
解析：取 $\overline{CD}$ 中點 M，連 $\overline{AM}$, $\overline{BM}$

$\therefore\ \overline{AM}\perp\overline{CD},\ \overline{BM}\perp\overline{CD},\ \overline{AM}=2\sqrt{3}=\overline{BM},\ \overline{AB}=4$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{12+12-16}{2\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$

15、兩平面 $E,\ F$，相交於一直線 AB，C 在平面 E 上，D 爲 C 在平面 F 之投影點，且 $C,\ D$ 均不在直線 AB 上，若 $\angle CAD=30°$，兩平面 $E,\ F$ 之交角爲 $60°$，$\angle CAB=\theta$，則 $\sin\theta=$________。

答案：$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



解析：作 $\overline{DN}\perp\overline{AB}$ 於 N　$\therefore\ \overline{CN}\perp\overline{AB}$，

$\therefore\ \angle CND=60°\,(=$平面交角$)$

$\therefore$ 設 $\overline{DN}=x,\ \overline{CD}=\sqrt{3}x,\ \overline{CN}=2x$

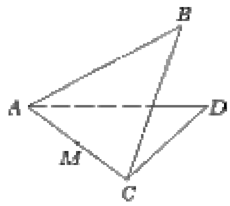
$\because D$ 爲 C 在平面 F 之投影點　$\therefore\ \overline{CD}\perp$ 平面 F

$\therefore\ \overline{CD}\perp\overline{DN}$ 且 $\overline{CD}\perp\overline{DA}$ 又 $\angle CAD=30°$

$\therefore\ \overline{AC}=2\sqrt{3}x$，$\triangle CAN$ 中 $\overline{CN}\perp\overline{AN}$

$\angle CAB=\theta$　$\therefore\ \angle CAN=\theta$ 或 $180°-\theta$，$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{2x}{2\sqrt{3}x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

16、一正方形紙片 $ABCD$，沿著對角線 $\overline{AC}$ 摺起，使平面 BAC 與平面 DAC 互相垂直，則 $\angle BCD=$________度。



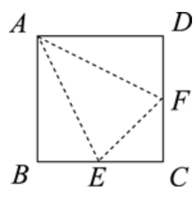
答案：60

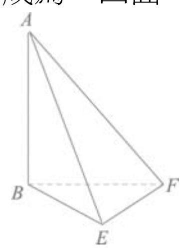
解析：取 $A\overline{C}$ 中點 M　$\therefore\ \overline{AM}=\overline{CM}=\overline{BM}=\overline{DM}=x$，

又平面 BAC 與平面 DAC 互相垂直

$\therefore\ \overline{BD}=\sqrt{2}x,\ \overline{BC}=\sqrt{2}x,\ \overline{CD}=\sqrt{2}x$，$\therefore\ \angle BCD=60°$

17、邊長爲 a 的正方形 $ABCD$，E, F 分別爲 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 中點，今以 $\overline{AE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$ 爲折線往上折，使 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AD}$，$\overline{DF}$ 與 $\overline{CF}$，$\overline{BE}$ 與 $\overline{CE}$ 接合，即 B, C, D 三點合在一起，成爲一四面體，求此四面體的體積？





答案：如圖，以 $\triangle CEF$ 爲底，高爲 $\overline{AB}$

$\therefore$ 體積

$$=\frac{1}{3}\cdot\triangle CEF\times\overline{AB}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\overline{CE}\times\overline{CF}\times\overline{AB}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a\cdot a=\frac{1}{24}a^3$$

18、將一長、寬各爲 5, 3 的矩形紙 $ABCD$ 沿對角線 $\overline{AC}$ 折起，且使 BCD 平面與 ACD 平面垂直，求

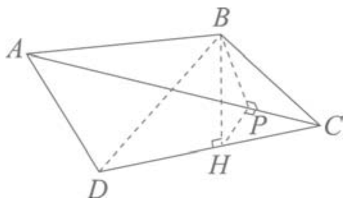
(1) B 到平面 ACD 之距離？

(2) 平面 BCD 與平面 ACD 之夾角爲 θ，求 $\sin\theta$？

答案：(1)過 B 作 $\overline{BH}\perp\overline{CD}$，作 $\overline{BP}\perp\overline{AC}$

根據三垂線定理，$\overline{HP}\perp\overline{AC}$

又∵ $\overline{CD}\perp\overline{AD}$，∴ $\overline{BD}\perp\overline{AD}$，



∴ $\overline{BD}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

∵ $\overline{BC}:\overline{BD}:\overline{CD}=3:4:5$，∴ $\triangle BCD$ 爲直角△，故

$\overline{BH}=\dfrac{3\times4}{5}=\dfrac{12}{5}$。

(2) $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$，$\overline{BP}=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{\sqrt{AC}}=\dfrac{5\times3}{\sqrt{34}}=\dfrac{15}{\sqrt{34}}$

$$\therefore \sin\theta=\sin\angle BPH=\frac{\overline{BH}}{\overline{BP}}=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{15}{\sqrt{34}}}=\frac{4\sqrt{34}}{25}$$

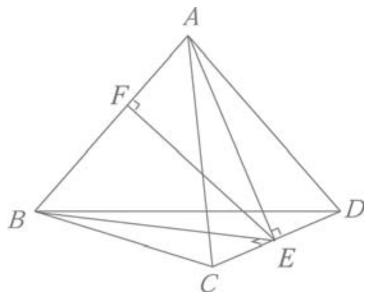
19、設 $\overline{OA},\ \overline{OB},\ \overline{OC}$ 三線段兩兩互相垂直，若 $\overline{OA}=4,\ \overline{OB}=6,\ \overline{OC}=12$，試求 $\triangle ABC$ 之面積。

答案：$\triangle ABC$ 之面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{6^2\cdot12^2+12^2\cdot4^2+4^2\cdot6^2}=2\sqrt{3^2\cdot6^2+6^2\cdot2^2+2^2\cdot3^2}=12\sqrt{14}$

20、設一正四面體之稜長爲 a，則

(1)任意相鄰兩面之夾角爲 θ，求 $\cos\theta=$？

(2)求不共頂點的任兩稜中點連線的長？



答案：如圖，E, F 分別爲 $\overline{CD}$，$\overline{AB}$ 之中點，則 $\angle AEB=\theta$，

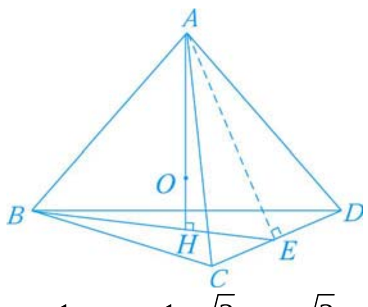
∵ $\triangle ACD$ 與 $\triangle BCD$ 皆爲正△，∴ $\overline{AE}=\overline{BE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot a$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{AE}^2+\overline{BE}^2-\overline{AB}^2}{2\overline{AE}\cdot\overline{BE}}=\frac{\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2-a^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{1}{3}$$

$$\overline{EF}=\sqrt{\overline{AE}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2-(\frac{1}{2}a)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}a^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

21、設一正四面體之稜長爲 a，過頂點作垂直底面的線段。求此正四面體的高及體積。

答案：

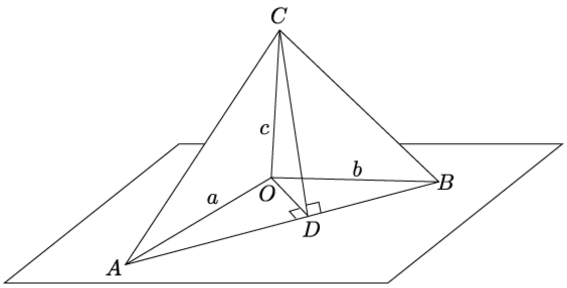


$$\overline{HE}=\frac{1}{3}\overline{BE}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$\therefore \overline{AH}=\sqrt{\overline{AE}^2-\overline{HE}^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2-(\frac{\sqrt{3}}{6}a)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

四面體體積$=\frac{1}{3}\triangle BCD\cdot\overline{AH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$。

22、設$\overline{OA},\ \overline{OB},\ \overline{OC}$三線段兩兩互相垂直，試證：$\triangle OBC^2+\triangle OAC^2+\triangle OAB^2=\triangle ABC^2$
其中$\triangle OBC$表$\triangle OBC$的面積之平方，餘仿此。



$\boxed{\text{答案}}$：設$\overline{OA}=a,\ \overline{OB}=b,\ \overline{OC}=c$。自 O 作$\overline{OD}\perp\overline{AB}$於 D，依三垂線定理$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，於是$\overline{CD}$爲$\triangle ABC$之一高。

在直角$\triangle OAB$中，其斜邊上之高$\overline{OD}=\frac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{\overline{AB}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

在直角$\triangle COD$中

$$\overline{CD}^2=\overline{OD}^2+\overline{OC}^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+c^2=\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a^2+b^2}$$

故$\triangle ABC^2=(\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{CD})^2=\frac{1}{4}\overline{AB}^2\times\overline{CD}^2$

$$=\frac{1}{4}(a^2+b^2)\times\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$=(\frac{1}{2}bc)^2+(\frac{1}{2}ca)^2+(\frac{1}{2}ab)^2$$

$$=\triangle OBC^2+\triangle OCA^2+\triangle OAB^2$$

註：$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$