高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.09.30					
範圍	1-4 向量	班級		姓名	
		座號			

一. 選擇題 (每題 5 分)

1、(C) 設 $\vec{a}=(2,\ell)$ 在直線 $L:2x-6y=7$ 上的正射影爲(3,1)，則 $\ell=$

(A)2 (B)3 (C)4 (D)5 (E)6

解析：直線 L 之方向向量爲(3,1)

$\therefore[\frac{(2,\ell)\cdot(3,1)}{(\sqrt{10})^2}](3,1)=(3,1)$ $\therefore\frac{6+\ell}{10}=1$ $\therefore\ell=4$

2、(D) 設 $x>0$ ，$y>0$ ，則 $(x+4y)(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})$ 之最小值爲 (A)8 (B)16 (C)17 (D)25 (E)289

解析：$(x+4y)(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})=1+\frac{4x}{y}+\frac{4y}{x}+16\geq 25$

$(\frac{4x}{y}+\frac{4y}{x}\geq 2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{4y}{x}}=8)$

3、(E) 於平面上，P, Q 二點對於 A 點對稱，Q, R 二點對於 B 點對稱。若 $\vec{x}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{y}=\overrightarrow{OB}$

且 $\overrightarrow{PR}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$ ，求 $\alpha-\beta=$？ (A)4 (B)2 (C)0 (D)–2 (E)–4

解析：$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{QR}-\overrightarrow{QP}=2\overrightarrow{QB}-2\overrightarrow{QA}=2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OQ})-2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OQ})=2\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}$

$\therefore\alpha=-2,\beta=2,\therefore\alpha-\beta=-2-2=-4$

4、(C) 設 $P(1,3)$，直線 $L:\begin{cases}x=-2+2t\\y=2-t\end{cases}$ $(t\in R)$，則 P 點到直線 L 的距離爲

(A) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (B) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\frac{9}{\sqrt{5}}$ (E)5

解析：$d(P,L)=\frac{|1+6-2|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

5、(D) 設 $P(x,y)$ 在直線 $3x-4y-5=0$ 上，則 $\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}$ 之最小值爲

(A)0 (B)1 (C) $\sqrt{2}$ (D)2 (E)4

解析：$P(-3,-1)\Rightarrow d(P,L)=\frac{|-10|}{5}=2$ ，$\therefore\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}$ 之最小值爲 2

二. 填充題 (每題 10 分)

6、設 $x,y\in R$ ，若 $3x-y=2$ ，則 x^2+y^2 的最小值爲______，此時的 $x=$______。

答案：$\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$

解析：$(x^2+y^2)[3^2+(-1)^2]\geq(3x-y)^2$

$(x^2+y^2)\geq\frac{4}{10}$ ，最小值爲 $\frac{2}{5}$, 此時 $\frac{x}{3}=\frac{y}{-1}$

即 $x+3y=0$ 且 $3x-y=2$ $\therefore x=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

7、直線 $L_1:\sqrt{3}x+2y=5$, $L_2:y=3\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$ ，則直線 L_1 與 L_2 的夾角爲______，或______。

答案：60°；120°

解析：$\cos\theta=\dfrac{(\sqrt{3},2)\cdot(3\sqrt{3},-1)}{\sqrt{7}\sqrt{28}}=\dfrac{7}{14}=\dfrac{1}{2}$　$\therefore \theta=60°$，兩線夾角為$60°$或$120°$

8、設直線$L: y=mx+2$與直線$x-2y+3=0$之交角為$45°$或$135°$，則$m=$_____或_____。

答案：$3;\ -\dfrac{1}{3}$

解析：$\tan 45°=\left|\dfrac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}\right|$　$\therefore \dfrac{3}{4}m^2-2m-\dfrac{3}{4}=0$，$m=3$或$-\dfrac{1}{3}$

9、$A(6,6),B(3,5)$，在直線$x+2y=8$上任取一點P使$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$最小，則$P$點坐標為______。

答案：$(3,\dfrac{5}{2})$

解析：$x+2y=8$之參數式為$\begin{cases}x=0+2t\\y=4-t\end{cases}$

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=(2t-6)^2+(-2-t)^2+(2t-3)^2+(-1-t)^2$

$=10t^2-30t+50=10(t-\dfrac{3}{2})^2+\dfrac{55}{2}$　$\therefore t=\dfrac{3}{2}$時$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$最小，$P$點為$(3,\dfrac{5}{2})$

10、設$A(-2,0),B(1,2)$，則$\overrightarrow{AB}$在直線$L:4x+y-9=0$上的正射影為______。

答案：$(\dfrac{-5}{17},\dfrac{20}{17})$

解析：$\overrightarrow{AB}=(3,2)$，直線$L$之方向向量$(1,-4)$

$\therefore$正射影為$[\dfrac{(3,2)\cdot(1,-4)}{(\sqrt{17})^2}](1,-4)=(\dfrac{-5}{17},\dfrac{20}{17})$

11、設直線L通過$(-2,-3)$且與$\vec{u}=(1,2)$垂直，則直線L的方程式為______。

答案：$x+2y+8=0$

解析：$\vec{u}=(1,2)$為直線L之一法向量　$\therefore L: x+2y=k$過$(-2,-3)$　$\therefore x+2y+8=0$

12、設$x,y\in R$，若$x^2+y^2-4x+4y=1$，則$x+2y-2$的最大值為______，此時的$x=$______。

答案：$3\sqrt{5}-4$；$2+\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

解析：$(x-2)^2+(y+2)^2=9$

$[(x-2)^2+(y+2)^2][1^2+2^2]\ge(x-2+2y+4)^2$

$-3\sqrt{5}\le x+2y+2\le 3\sqrt{5}$

$-3\sqrt{5}-4\le x+2y-2\le 3\sqrt{5}-4$

$\therefore$最大值為$3\sqrt{5}-4$，此時$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{2}$　$\therefore x=2+\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

13、已知二定點$A(1,0),B(2,-3)$，而P為直線$x+y=2$上之動點，則$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$之最小值為____，

此時 P 點坐標爲＿＿＿＿＿。

答案：$-\frac{1}{2}$；$(\frac{5}{2},-\frac{1}{2})$

解析：$x+y=2$ 上動點 $P(t,2-t)$

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(t-1,2-t)\cdot(t-2,5-t)=2t^2-10t+12=2(t-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{2}$$

$\therefore$最小值爲$-\frac{1}{2}$，$t=\frac{5}{2}$, $P(\frac{5}{2},-\frac{1}{2})$

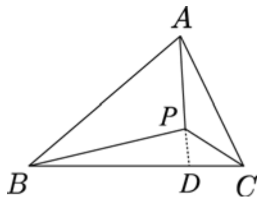
14、設 $\overrightarrow{a}=(0,3)$，$\overrightarrow{b}=(3,4)$，則 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的投影(正射影)爲＿＿＿＿＿＿，$\overrightarrow{a}$ 對於 $\overrightarrow{b}$ 的對稱向量爲＿＿＿＿＿＿＿。

答案：$(\frac{36}{25},\frac{48}{25})$; $(\frac{72}{25},\frac{21}{25})$

解析：(1) $(\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2})\overrightarrow{b}=\frac{12}{25}(3,4)=(\frac{36}{25},\frac{48}{25})$

(2) $2\cdot\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}\cdot\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}=(\frac{72}{25},\frac{96}{25})-(0,3)=(\frac{72}{25},\frac{21}{25})$

15、設 P 爲△ABC 內部一點，且滿足 $2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}$，若直線 $\overline{AP}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D，則



(1)求△ABP：△BCP：△CAP=＿＿＿＿＿＿＿＿

(2)求 $\overline{AP}:\overline{PD}=$＿＿＿＿＿＿＿

(3)設 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 x=＿＿＿＿＿＿；y=＿＿＿＿＿＿

答案：(1)$\because 2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$，$\therefore$△$ABP$：△$BCP$：△$CAP$=3：2：1

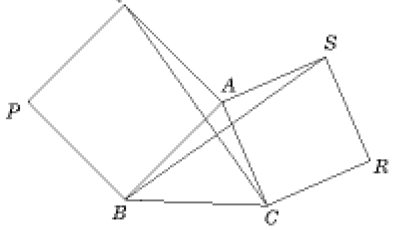
(2) $\overline{AP}:\overline{PD}$=(△$ABP$+△$ACP$)：△$BCP$=(3+1)：2=2：1

(3)$\because \overline{BD}:\overline{CD}$=3：1, $\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\cdot(\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$

$\therefore x=\frac{1}{6}, y=\frac{1}{2}$

16、如圖，$ABPQ$, $ACRS$ 均爲正方形，試證 $\overrightarrow{BS}\perp\overrightarrow{CQ}$。



答案：$\because ABPQ$, $ACRS$ 均爲正方形

$\therefore \overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{CQ}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AS})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AQ})=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AQ}$

$\because \angle QAB=90^\circ$, $\angle SAC=90^\circ$ $\therefore \angle BAC+\angle QAS=180^\circ$

設$\angle BAC=\theta$，則$\angle QAS=180^\circ-\theta$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\ |\overrightarrow{AC}|\cos\theta$

$\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AS}|\ |\overrightarrow{AQ}|\cos(\pi-\theta)=-|\overrightarrow{AB}|\ |\overrightarrow{AC}|\cos\theta$

$\therefore \overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{CQ}=0$ $\therefore \overrightarrow{BS}\perp\overrightarrow{CQ}$

17.二直線$L_1:3x+4y-4=0, L_2:5x+12y-12=0$，求所交銳角的角平分線方程式？__________

答案

於坐標平面作圖，二直線$L_1:3x+4y-4=0, L_2:5x+12y-12=0$，所交銳角的角平分線方程式通過異號區$\Rightarrow \dfrac{3x+4y-4}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\dfrac{5x+12y-12}{\sqrt{5^2+12^2}}\Rightarrow 4x+7y--7=0$