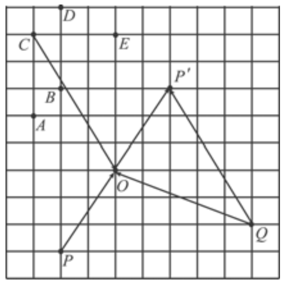
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.09.23					
範圍	1-3 向量座標化	班級		姓名	
		座號			

一. 選擇題 (每題 5 分)



1、(C) 如圖，下面哪一選項中的向量與另兩個向量$\overrightarrow{PO}$，$\overrightarrow{QO}$之和等於零向量？

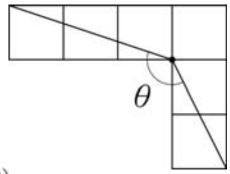
(A) $\overrightarrow{AO}$ (B) $\overrightarrow{BO}$ (C) $\overrightarrow{CO}$ (D) $\overrightarrow{DO}$ (E) $\overrightarrow{EO}$

解析：如上圖，取$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{PO}$

則 $\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{QP'}$

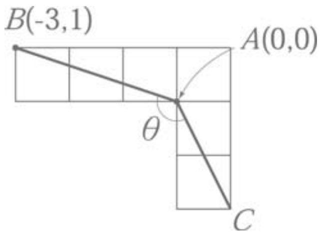
因此，$\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{QP'}=\vec{0}$（$\because$ $\overrightarrow{CO}$與$\overrightarrow{QP'}$長度相同，方向相反）

2、(B) 如圖每一小格均為正方形，求$\cos\theta=$？



(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $-\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析：自訂坐標 $A(0, 0)$, $B(-3, 1)$, $C(1, -2)$



$\therefore \overrightarrow{AB}=(-3,\ 1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,\ -2)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{-5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

二. 填充題 (每題 10 分)

3、 設$\vec{a}=(2,-3)$，$\vec{b}=(x,2-x)$，則(1)若$\vec{a}/\!/\vec{b}$，則$x=$______。(2)若$\vec{a}\perp\vec{b}$，則$x=$______。

答案：(1) -4 (2) $\dfrac{6}{5}$

解析：(1)$\because \vec{a}/\!/\vec{b}$，$\therefore \dfrac{2}{x}=\dfrac{-3}{2-x}\Rightarrow x=-4$

(2)$\because \vec{a}\perp\vec{b}$，$\therefore 2x-3(2-x)=0\Rightarrow x=\dfrac{6}{5}$

4、 設$\overrightarrow{OA}=(4,2)$，$\overrightarrow{OB}=(-3,1)$，$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OA}$且$\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{OB}$又$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，則$\overrightarrow{OC}=$____,

$\overrightarrow{OD}=$______。

答案：(-2,4); (1,3)

解析：設$\overrightarrow{OC}=(x,y)$，$(x,y)\cdot(4,2)=0$ $\therefore 4x+2y=0$

$\overrightarrow{AC}=(x-4,y-2)/\!/(-3,1)$ $\therefore x+3y=10$

$\therefore x=-2$，$y=4\Rightarrow\overrightarrow{OC}=(-2,4)$，又$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OD}=(1,3)$

5、 設 $\overrightarrow{a}=(1,2),\ \overrightarrow{b}=(2,1)$，則 $(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})\cdot(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=$______，又 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 之夾角爲 θ，則 $\cos\theta=$_____。

答案：$12;\ \frac{4}{5}$

解析：$(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})\cdot(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=(5,4)\cdot(0,3)=12$，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|}=\dfrac{4}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$

6、過 $P(0,-1)$且與直線 $L{:}\,3x+4y-12=0$ 交成 45°之直線方程式爲____________________。

答案：$x-7y-7=0$ 或 $7x+y-1=0$

解析：設直線 $y=mx-1\Rightarrow mx-y-1=0$，$\therefore \dfrac{|3m-4|}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{3^2+4^2}}=\cos45^\circ$

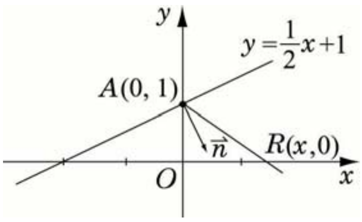
$|3m-4|=5\sqrt{m^2+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，兩邊平方

$9m^2-24m+16=\dfrac{25}{2}(m^2+1)$

$7m^2+48m-7=0$，$\therefore m=\dfrac{1}{7}$ 或 -7

$\therefore y=\dfrac{1}{7}x-1$ 或 $y=-7x-1$，即 $x-7y-7=0$ 或 $7x+y-1=0$。

7、 在坐標平面上，一道光線通過原點 O 後，沿著 y 軸射向直線 L： $y=\frac{1}{2}x+1$，碰到直線 L 後，假設光線依光學原理（入射角等於反射角）反射後通過 x 軸上的 R 點，則 R 點的 x 坐標爲______。(化成最簡分數)



答案：$\frac{4}{3}$

解析：直線 $L: y=\dfrac{1}{2}x+1$，即 $x-2y+2=0$

L 交 y 軸於 $A(0,1)$

取 L 之一法向量 $\overrightarrow{n}=(1,-2)$，已知 $\overrightarrow{AO}=(0,-1)$，$\overrightarrow{AR}=(x,-1)$

因爲 $\overrightarrow{AO}$ 與 $\overrightarrow{n}$ 之夾角等於 $\overrightarrow{AR}$ 與 $\overrightarrow{n}$ 之夾角，得 $\dfrac{(0,-1)\cdot(1,-2)}{\sqrt{0^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{(x,-1)\cdot(1,-2)}{\sqrt{x^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2}}$

$2=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow 2\sqrt{x^2+1}=x+2\Rightarrow 4(x^2+1)=x^2+4x+4\Rightarrow 3x^2=4x\ (x\neq0)\Rightarrow x=\dfrac{4}{3}$

故 R 的 x 坐標爲 $\dfrac{4}{3}$。

8、設△ABC 的三頂點爲 $A(6,20), B(13,3), C(-4,-4)$，則 $\angle A=$______。

答案：45°

解析：$\overrightarrow{AB}=(7,-17)$，$\overrightarrow{AC}=(-10,-24)$，$\overline{AB}=13\sqrt{2}$，$\overline{AC}=26$

$\therefore \cos A=\dfrac{338}{26\times13\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\qquad \therefore \angle A=45^\circ$

9、設 $A(0,1), B(-2,-3), C(1,a), D(3,b)$，(1)若 $ABCD$ 為長方形，則 $a=$______, (2)若 $ABCD$ 為菱形，則 $a=$______。

$\boxed{答案}$：$-\dfrac{9}{2}$; $-3\pm\sqrt{11}$

$\boxed{解析}$：(1)$ABCD$ 為長方形　$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ 且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$(-2,-4)\cdot(3,a+3)=0$　$\therefore a=-\dfrac{9}{2}$

(2)$ABCD$ 為菱形　$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ 且 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

$(-2,a-b)=(-2,-4)$　$\therefore a-b=-4,\ b=a+4$

$(1,a-1)\cdot(5,b+3)=0$　$\therefore (a-1)(b+3)+5=0$

$a^2+6a-2=0,\ a=-3\pm\sqrt{11}$

10、設 $|\overrightarrow{a}|=5\sqrt{2}$，$\overrightarrow{b}=(-4,3)$，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 之夾角為 $135°$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$______，又 $\overrightarrow{a}=$______或______。

$\boxed{答案}$：-25; (7,1); (1,-7)

$\boxed{解析}$：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=5\sqrt{2}\times5\times\cos135°=-25$

設 $\overrightarrow{a}=(x,y)$　$\therefore x^2+y^2=50$ 且 $-4x+3y=-25$

$\therefore x=7,\ y=1$ 或 $x=1,\ y=-7$，$\therefore \overrightarrow{a}=(7,1)$ 或 $(1,-7)$

11、設 $\overrightarrow{a}=(2,-1)$，$\overrightarrow{b}=(x+1,x-1)$ 且 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角為 $45°$，則 $x=$______或______。

$\boxed{答案}$：2; $-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{解析}$：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=x+3=|\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|\cos45°=\sqrt{5}\sqrt{2x^2+2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$8x^2-12x-8=0,\ (2x+1)(x-2)=0,\ x=2$ 或 $-\dfrac{1}{2}$

12、設△ABC 之三頂點為 $A(2,0), B(4,-1), C(6,7)$，試求△ABC 之面積____________。

$\boxed{答案}$：$\overrightarrow{AB}=(4-2,-1-0)=(2,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(6-2,7-0)=(4,7)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times2+(-1)\times(-1)=5$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times4+7\times7=65$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times4+(-1)\times7=1$

故△ABC 之面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC})-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{5\times65-1^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{324}=9$

13、已知一點 $A(-7,5)$ 及一直線 $L:3x-2y+5=0$，試求：

(1)A 到 L 的距離______________。(2)A 在 L 上的正射影______________。

(3)A 對於 L 的對稱點______________。

$\boxed{答案}$：(1) A 到 L 的距離 $=\dfrac{|3\times(-7)-2\times5+5|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{26}{\sqrt{13}}=2\sqrt{13}$

(2) $-\dfrac{3\times(-7)-2\times5+5}{3^2+2^2}=-\dfrac{-26}{13}=2$

A 在 L 上的正射影爲 $(-7,\ 5)+2(3,\ -2)=(-1,\ 1)$ 。

(3) $-\dfrac{2[3\times(-7)-2\times5+5]}{3^2+2^2}=4$ ，A 對於 L 的對稱點爲 $(-7,\ 5)+4(3,\ -2)=(5,\ -3)$ 。

14、設 $\vec{a}=(8,\ 4),\ \ \vec{b}=(-4,\ 3)$，試求 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 之方向上的投影量及 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影________。

答案：$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 之方向上的投影量=$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{8\times(-4)+4\times3}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=\dfrac{-20}{5}=-4$

$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影=$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\dfrac{-20}{25}(-4,\ 3)=(\dfrac{16}{5},\ -\dfrac{12}{5})$

15、設 $\overrightarrow{OA}=(3,\ 1),\ \ \overrightarrow{OB}=(-1,\ 2)$。若 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB},\ \ \overrightarrow{BC}//\overrightarrow{OA},\ \ \overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，試求 $\overrightarrow{OD}=$______。

答案：由 $\overrightarrow{OB}=(-1,\ 2)$ ，$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$ ，令 $\overrightarrow{OC}=(2k,\ k)$ 。$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(2k+1,\ k-2),$ ，

$\overrightarrow{OA}=(3,\ 1)$ ，而 $\overrightarrow{BC}//\overrightarrow{OA}$ ，則 $\dfrac{2k+1}{3}=\dfrac{k-2}{1}\Rightarrow(2k+1)\cdot1-(k-2)\cdot3=0$

$\Rightarrow 2k+1-3k+6=0\Rightarrow k=7$

即 $\overrightarrow{OC}=(14,\ 7)$ ，由 $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$ 得 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(14,\ 7)-(3,\ 1)=(11,\ 6)$

16、設 $x,\ y\in\mathbb{R}$ ，若 $6x-12y=41$，試求 $4x^2+9y^2-20x+24y+42$ 之最小值，及此時的 $x,\ y$ 之值____________ 。

答案：考慮 $2x-5,\ \ 3y+4$ 和 $3,-4$ 兩組實數。根據柯西不等式，就有

$[(2x-5)\cdot3+(3y+4)\cdot(-4)]^2\le[(2x-5)^2+(3y+4)^2][3^2+(-4)^2]$

整理 $(6x-12y-31)^2\le25(4x^2+9y^2-20x+24y+41)$

$6x-12y=41$ 代入上式，得

$100\le25(4x^2+9y^2-20x+24y+41)\Rightarrow4x^2+9y^2-20x+24y+41\ge4$

$\Rightarrow4x^2+9y^2-20x+24y+42\ge5$

所以 $4x^2+9y^2-20x+24y+42$ 之最小値爲 5。

此時 $\begin{cases}2x-5=3t\\3y+4=-4t\\6x-12y=41\end{cases}$ ，解之得 $x=\dfrac{31}{10},\ \ y=-\dfrac{28}{15}$ 。

17、試求下列三小題中，兩直線 L_1,L_2 的夾角。

(1) $\begin{cases}L_1:10x-8y+7=0\\L_2:15x-12y-11=0\end{cases}$ ____________ (2) $\begin{cases}L_1:3x+4y-2=0\\L_2:8x-6y+5=0\end{cases}$ ____________

(3) $\begin{cases}L_1:2x+\sqrt{3}y-1=0\\L_2:-x+3\sqrt{3}y+4=0\end{cases}$ ____________

答案：(1) $\vec{n_1}=(10,-8)=2(5,-4)$, $\vec{n_2}=(15,-12)=3(5,-4)$ ，$\vec{n_1}//\vec{n_2}$ ，故 L_1,L_2 之夾角爲 0。

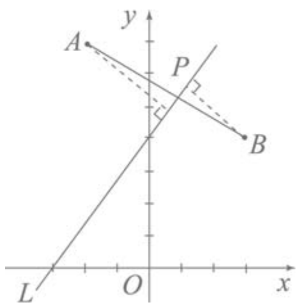
所以 $\vec{n_1},\vec{n_2}$ 之夾角 $\theta=0$ ，所以 L_1,L_2 夾角爲 0。

(2) $\vec{n_1}=(3,4),\vec{n_2}=(8,-6)$ ，$\cos\theta=\dfrac{(3,4)\cdot(8,-6)}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{8^2+6^2}}=0\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ，L_1,L_2 之夾角爲 $\dfrac{\pi}{2}$ 。

(3) $\vec{n_1}=(2,\sqrt{3}),\vec{n_2}=(-1,3\sqrt{3})$ ，$\cos\theta=\dfrac{(2,\sqrt{3})\cdot(-1,3\sqrt{3})}{\sqrt{4+3}\sqrt{1+27}}=\dfrac{7}{14}=\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{3}$

故 L_1,L_2 之夾角爲 $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$ 。

18、設 $A(-2,7),B(3,4),L:4x-3y+12=0$，若 L 交 $\overline{AB}$ 於 P，求 $\overline{AP}:\overline{BP}$ 之比值________



答案：如圖 $\overline{AP}:\overline{BP}=$

$d(A,L)$：$d(B,L)=\dfrac{|-8-21+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}:\dfrac{|12-12+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=17:12=\dfrac{17}{12}$

19、已知二定點 $A(2,-1),B(4,1)$，而 P 爲直線 $x-y=0$ 上之動點，試求 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 之最小值____________。

答案：設 P 之坐標爲 $(t,\ t)$ ，則 $\overrightarrow{AP}=(t-2,\ t+1),\quad \overrightarrow{BP}=(t-4,\ t-1)$ 。由

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}&=(t-2)(t-4)+(t+1)(t-1)\\&=2t^2-6t+7\\&=2(t^2-3t+\frac{9}{4})+\frac{5}{2}\\&=2(t-\frac{3}{2})^2+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

知在 $t=\dfrac{3}{2}$ 時，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 有最小值爲 $\dfrac{5}{2}$ 。

20、設 $\vec{a}=(8,\ 4),\quad \vec{b}=(-4,\ 3)$ ，試求 $\vec{a}$ 對於 $\vec{b}$ 的對稱向量________。

答案：$\vec{a}$ 對於 $\vec{b}$ 的對稱向量爲

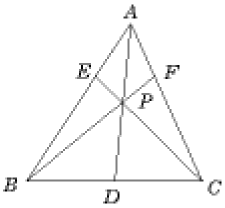
$$\frac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}-\vec{a}=(\frac{32}{5},\ -\frac{24}{5})-(8,4)=(-\frac{8}{5},\ -\frac{44}{5})$$

21、$\triangle ABC$ 中 D 爲 $\overline{BC}$ 的中點，E 在 $\overline{AB}$ 上且 $2\overline{AE}=\overline{BE}$ ，$\overline{AD}$ 與 $\overline{CE}$ 相交於 P，$\overrightarrow{BP}$ 交 $\overline{AC}$ 於 F；則試求下列各比值

(1) $\overline{AP}:\overline{PD}=$____________, (2) $\overline{CP}:\overline{EP}=$____________, (3) $\overline{AF}:\overline{FC}=$____________,

(4) $\overline{BP}:\overline{PF}=$____________, (5) $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=$____________

答案：



由孟氏定理得 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}\times\dfrac{\overline{DP}}{\overline{PA}}=1$ ，$\therefore \overline{DP}:\overline{PA}=1:1=1$

又 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{DB}}\times\dfrac{\overline{BA}}{\overline{AE}}\times\dfrac{\overline{EP}}{\overline{PC}}=1 \quad \therefore \overline{CP}:\overline{EP}=3:1=3$

又 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CB}}{\overline{BD}}\times\dfrac{\overline{DP}}{\overline{PA}}=1 \quad \therefore \overline{AF}:\overline{FC}=1:2=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}\times\dfrac{\overline{CA}}{\overline{AF}}\times\dfrac{\overline{FP}}{\overline{BP}}=1 \quad \therefore \overline{BP}:\overline{PF}=3:1=3$

$\therefore \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1}\times\dfrac{2}{1}=1$

22、設 $\overrightarrow{a_k}=(\cos\dfrac{k\pi}{2},\sin\dfrac{k\pi}{2})$， $\overrightarrow{b}=(1,\sqrt{3})$ ，則 $\sum\limits_{k=1}^{8}|\overrightarrow{a_k}+\overrightarrow{b}|^2=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

$\boxed{\text{答案}}$： $\overrightarrow{a_k}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a_k}|^2+2\overrightarrow{a_k}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$

$\sum\limits_{k=1}^{8}2\overrightarrow{a_k}\cdot\vec{b}=2\vec{b}\cdot(\sum\limits_{k=1}^{8}\overrightarrow{a_k})=0$， $\overrightarrow{a_k}|^2=1$， $\overrightarrow{b}|^2=4$

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{8}|\overrightarrow{a_k}+\overrightarrow{b}|^2=8(1+4)=40$