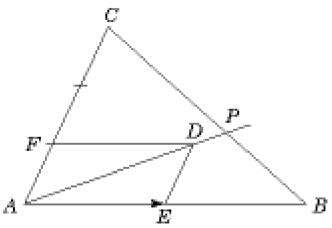
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.09.16					
範圍	1-2 向量內積及應用	班級		姓名	
		座號			

一. 選擇題 (每題 5 分)

1、(B) A, B, C 為平面上不共線三點，令 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ，設 $\overrightarrow{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 P，則 $\overline{AD}:\overline{AP}$ 之值為 (A)$\frac{2}{3}$ (B)$\frac{5}{6}$ (C)1 (D)$\frac{6}{5}$ (E)$\frac{3}{2}$

$\boxed{\text{解析}}$：



$\because A, D, P$ 三點共線，$\therefore \overrightarrow{AP}=k\,\overrightarrow{AD}=\frac{k}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{3}\overrightarrow{AC}$

$\because P, B, C$ 三點共線 $\therefore \frac{k}{2}+\frac{k}{3}=1$；$\therefore k=\frac{6}{5}$ $\therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{AP}}=\frac{5}{6}$

2、(E) G 為△ABC 的重心，且 $|\overrightarrow{GA}|=2$，$|\overrightarrow{GB}|=3$，$|\overrightarrow{GC}|=4$，若 $\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{GC}$ 之夾角為 θ，則
(A)$0^\circ<\theta\le 90^\circ$ (B)$90^\circ<\theta\le 120^\circ$ (C)$120^\circ<\theta\le 135^\circ$ (D)$135^\circ<\theta\le 150^\circ$
(E)$150^\circ<\theta<180^\circ$

$\boxed{\text{解析}}$：$\because G$ 為重心 $\therefore \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\therefore |\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}|^2=|-\overrightarrow{GA}|^2$ $\therefore |\overrightarrow{GB}|^2+2\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+|\overrightarrow{GC}|^2=|\overrightarrow{GA}|^2$

$\therefore \overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=-\frac{21}{2}$, $\cos\theta=-\frac{7}{8}<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore 150^\circ<\theta<180^\circ$

3、(ACE) 下列哪一個條件使P點在線段 $\overline{AB}$ 上？（複選） (A)$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

(B)$\overrightarrow{OA}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OP}$ (C)$3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OP}=\vec{0}$ (D)$3\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}=\vec{0}$

(E)$\overrightarrow{OA}=\frac{5}{3}\overrightarrow{OP}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

$\boxed{\text{解析}}$：$\because P$ 在線段 $\overline{AB}$ 上，$\therefore P, A, B$ 三點共線$\Rightarrow$係數和$=1$

(A)（○）：$\because \frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$

(B)（╳）：$\because \overrightarrow{OA}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OP}, \frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1$，$\therefore A$ 在 $\overline{BP}$ 上，$\therefore P$ 不在 $\overline{AB}$ 上。

(C)（○）：$\because \overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$, $\therefore \frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

(D)（╳）：$\because \overrightarrow{OP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，$\therefore -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\neq 1$

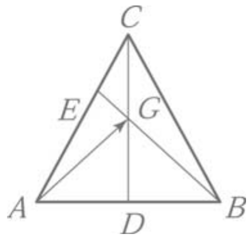
(E)（○）：$\because \overrightarrow{OP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$，$\therefore \frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$

二. 填充題 (每題 10 分)

4、△ABC 中，D 是 $\overline{AB}$ 之中點，E 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AE}:\overline{CE}=2:1$，$\overline{CD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於 G，設 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 $(x,y)=$________。

答案：$(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2})$

解析：



$\because \overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$=2x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AC}\cdots\cdots①$

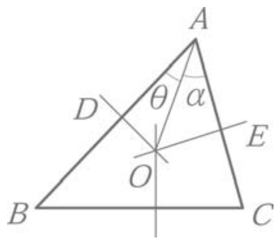
$=x\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}y\overrightarrow{AE}\cdots\cdots②$

由①②得 $\begin{cases}2x+y=1\\ x+\frac{3}{2}y=1\end{cases}$，$\therefore \begin{cases}x=\frac{1}{4}\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$，即 $(x,y)=(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2})$。

5、設△ABC 中，$\overline{BC}=2\sqrt{7}$, $\overline{AC}=4$, $\overline{AB}=6$，O 爲△ABC 之外心，若 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 $(x,y)=$________。

答案：$(\frac{4}{9},\frac{1}{6})$

解析：



$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

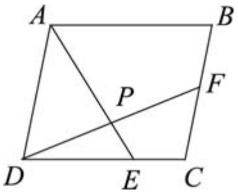
$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2$

因爲 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2}=6\cdot 4\cdot\frac{36+16-28}{2\cdot 6\cdot 4}=12$

且 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=18$；$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=8$

$\therefore\begin{cases}36x+12y=18\\12x+16y=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{4}{9}\\y=\frac{1}{6}\end{cases}$，$\therefore(x,y)=(\frac{4}{9},\frac{1}{6})$

6、如圖，$ABCD$ 是平行四邊形，$\overline{BF}:\overline{FC}=1:1$, $\overline{CE}:\overline{ED}=1:2$，$\overline{AE}$ 交 $\overline{DF}$ 於 P，設 $\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$，求數對 $(x,y)=$________。



答案：$(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4})$

解析：(1) $\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\Rightarrow\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ 代入上式

$\therefore\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BA}+y(\overrightarrow{BE}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA})=(x-\frac{1}{3}y)\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BE}$；$A, P, E$ 共線 $\Rightarrow(x-\frac{1}{3}y)+y=1$

(2) $\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BF}\Rightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}-2\overrightarrow{BF}$ 代入上式

$\overrightarrow{BP}=x\cdot(\overrightarrow{BD}-2\overrightarrow{BF})+y\cdot2\overrightarrow{BF}=x\overrightarrow{BD}+(-2x+2y)\overrightarrow{BF}$；$D, P, F$ 共線 $x+(-2x+2y)=1$

由(1)(2)得 $\begin{cases}x+\frac{2}{3}y=1\\-x+2y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{3}{4}\\x=\frac{1}{2}\end{cases}$，故 $(x,y)=(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4})$。

7、平面上 A, B, C 三點共線，O 爲不在此線上之任一點，若 $(2t+1)\overrightarrow{OA}+(3t+4)\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，求實數 $t=$______。

答案：-2

解析：$\overrightarrow{OC}=-\frac{2t+1}{5}\overrightarrow{OA}-\frac{3t+4}{5}\overrightarrow{OB}$

$\because C, A, B$ 共線，$\therefore-\frac{2t+1}{5}-\frac{3t+4}{5}=1\Rightarrow t=-2$

8、若 D 爲 $\triangle ABC$ 內部一點，且 $\triangle ABD$ 的面積：$\triangle ACD$ 的面積 $=2:3$，又 $\overline{AD}$ 之延長線與 $\overline{BC}$ 相交於 E，則 $\overrightarrow{AE}=$_____ $\overrightarrow{AB}+$_____ $\overrightarrow{AC}$。

答案：$\frac{3}{5}$; $\frac{2}{5}$

解析：$\because \triangle ABD$ 的面積：$\triangle ACD$ 的面積$=2:3$　$\therefore \overline{BE}:\overline{CE}=2:3$

$\therefore \overrightarrow{AE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

9、設$\triangle ABC$ 中，P 在線段$\overline{BC}$ 上且$\overline{PB}:\overline{PC}=2:3$，若$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，又

$\overrightarrow{PC}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則數對$(x,y)=$_______，又數對$(\alpha,\beta)=$_______。

答案：$(\frac{3}{5},\frac{2}{5})$；$(-\frac{3}{5},\frac{3}{5})$

解析：$\because \overline{PB}:\overline{PC}=2:3$　$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$　$\therefore (x,y)=(\frac{3}{5},\frac{2}{5})$

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}$　$\therefore (\alpha,\beta)=(-\frac{3}{5},\frac{3}{5})$

10、$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=4$，若 I 爲$\triangle ABC$ 之內心，O 爲平面上任一點，則

$\overrightarrow{OI}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$，則$\alpha=$______，$\beta=$______，$\gamma=$______。

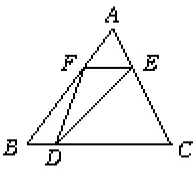
答案：$\frac{3}{9}$；$\frac{4}{9}$；$\frac{2}{9}$

解析：I 爲$\triangle ABC$ 的內心　$\therefore \overrightarrow{OI}=\frac{3}{2+3+4}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{2+3+4}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{2+3+4}\overrightarrow{OC}$

$\therefore \alpha=\frac{3}{9},\ \beta=\frac{4}{9},\ \gamma=\frac{2}{9}$

11、(如圖)在$\triangle ABC$的三邊$\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 上分別取D, E, F三點，使$\overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{AE}$，

$\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}$。設 G 爲$\triangle DEF$ 的重心，$\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則$\alpha=$______，$\beta=$______。



答案：$\frac{17}{45}$；$\frac{8}{45}$

解析：$\because G$ 爲$\triangle DEF$ 的重心　$\therefore \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$

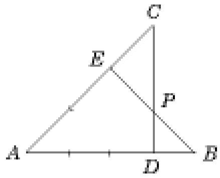
又$\overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{BD}$　$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{AE}$　$\therefore \overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}$　$\therefore \overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AG}=\frac{17}{45}\overrightarrow{AB}+\frac{8}{45}\overrightarrow{AC}$　$\therefore \alpha=\frac{17}{45},\ \beta=\frac{8}{45}$

12、如圖△ACD 中 E 在 $\overline{AC}$ 上且 $2\overline{CE}=\overline{AE}$，$B$ 在 $\overline{AD}$ 延長線上且 $3\overline{BD}=\overline{AD}$，設 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 相交於 P，則(1) $\overline{DP}:\overline{CP}=$______，(2) $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對 $(x,y)=$______。



$\boxed{答案}$：(1)$1:2$　(2)$(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$

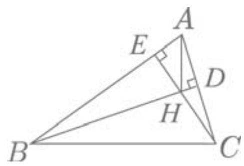
$\boxed{解析}$：由孟氏定理得知 $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}\times\frac{\overline{DP}}{\overline{PC}}=1$

(1)$\therefore\overline{DP}:\overline{CP}=1:2$

(2) $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$

13、設△ABC 中，$\overline{BC}=2\sqrt{7}$，$\overline{AC}=4$，$\overline{AB}=6$，設 H 為△ABC 之垂心，若 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求數對 $(x,y)=$______________。

$\boxed{答案}$：



$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=x\cdot|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2$

又 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12$

$\therefore\begin{cases}36x+12y=12\\12x+16y=12\end{cases}$，解得 $x=\frac{1}{9},y=\frac{2}{3}$；$\therefore(x,y)=(\frac{1}{9},\frac{2}{3})$

14、G 為△ABC 的重心，若 $|\overrightarrow{GA}|=3$，$|\overrightarrow{GB}|=4$，$|\overrightarrow{GC}|=5$，則

(1) $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GC}=$____________；(2) $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=$____________。

$\boxed{答案}$：$\because\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$，$|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}|^2=|-\overrightarrow{GB}|^2$　$\therefore\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GC}=-9$

$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GB}\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC})=\overrightarrow{GB}\cdot(-\overrightarrow{GB})=-16$

15、若 D 為△ABC 內部一點，且 $2\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$，且 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對 $(x,y)=$________；又△ABD 的面積：△ACD 的面積：△BCD 的面積 $=$___________。

$\boxed{答案}$：$\because 2\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$　$\therefore 2\overrightarrow{AD}+3(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$\therefore\overrightarrow{AD}=\frac{3}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，$(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{6})$

$\therefore \triangle ABD$ 的面積：$\triangle ACD$ 的面積$=1:3$
同理可得$\triangle ACD$ 的面積：$\triangle BCD$ 的面積$=3:2$
$\therefore \triangle ABD$ 的面積：$\triangle ACD$ 的面積：$\triangle BCD$ 的面積$=1:3:2$