<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：95.08.11</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">3-7 複數極式</td><td>班級</td><td></td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(E) 若ω爲 1 的立方虛根之一，則$(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16})=$

(A) -8 (B) 8ω (C) $8\omega^2$ (D) -16 (E) 16

解析：ω爲 1 的立方虛根　$\therefore \omega^3=1$ 且 $1+\omega+\omega^2=0$

$\therefore$原式$=(-2\omega)(-2\omega^2)(-2\omega^4)(-2\omega^8)=16\omega^{15}=16$

2、(C) $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 設一複數數列滿足 $z_1=i\ (i=\sqrt{-1})$，$z_{n+1}=\omega z_n+i$，則 $z_{24}=$

(A) ω (B) $\omega+i$ (C) 0 (D) $-\omega$ (E) $\omega+1$

解析：$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$　$\therefore \omega^3=1$，$1+\omega+\omega^2=0$

$z_1=i$，$z_2=\omega i+i=-i\omega^2$，$z_3=0$，$z_4=i$，$z_5=z_2\ldots$　$\therefore z_{24}=z_3=0$

3、(C) 若 $z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$，則 $z^{68}+z^{69}+\cdots+z^{339}=$

(A) 0 (B) z^3 (C) $-z^4$ (D) z^5 (E) 1

解析：$\because z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$　$\therefore z^7=1$

$$z^{68}+z^{69}+\cdots+z^{339}=\frac{z^{68}(z^{272}-1)}{z-1}=\frac{z^5(z^6-1)}{z-1}=\frac{z^4(1-z)}{z-1}=-z^4$$

二. 填充題 (每題 10 分)

4、將 $\dfrac{\sqrt{3}-i}{i-1}$ 化爲極式，可得_____，又 $(\dfrac{\sqrt{3}-i}{i-1})^{26}=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$，則 $a=$_____，$b=$_____。

答案：$\sqrt{2}(\cos 195°+i\sin 195°)$，$2^{12}\times\sqrt{3}$，$2^{12}$

解析：$\dfrac{\sqrt{3}-i}{i-1}=\dfrac{2[\cos(-30°)+i\sin(-30°)]}{\sqrt{2}(\cos 135°+i\sin 135°)}=\sqrt{2}(\cos 195°+i\sin 195°)$

又 $(\dfrac{\sqrt{3}-i}{i-1})^{26}=(\sqrt{2})^{26}\cdot(\cos 195°+i\sin 195°)^{24}\cdot(\cos 195°+i\sin 195°)^2$

$=2^{13}\cdot(\cos 30°+i\sin 30°)=2^{12}(\sqrt{3}+i)$

$\therefore a=2^{12}\times\sqrt{3}$ ，$b=2^{12}$

5、設 $z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$，則 $z^3+z^6+z^9+z^{12}=$_____，$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)=$_____。

答案：-1, 5

解析：$z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$　$\therefore z^5=1$ 且 $1+z+z^2+z^3+z^4=0$

$\therefore z^3+z^6+z^9+z^{12}=z^3+z+z^4+z^2=-1$

$\because x^4+x^3+x^2+x+1=(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)$

$\therefore 5=(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)$

6、 設 $z=(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})i$ ，則 $|z|=$______，又其主輻角＝______。

答案：$2\sqrt{2}$ ， $255°$

解析：$z=2\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i)=2\sqrt{2}(-\cos 75°-i\sin 75°)$

$=2\sqrt{2}(\cos 255°+i\sin 255°)$

$\therefore |z|=2\sqrt{2}$ ，故主輻角 $=255°$

7、 設 $z=1+\cos 220°-i\sin 220°$ ，則 $|z|=$______，又其主輻角爲______。

答案：$-2\cos 110°$， $70°$

解析：$|z|=\sqrt{(1+\cos 220°)^2+(\sin 220°)^2}=\sqrt{2^2(\cos 110°)^2}=-2\cos 110°$

$\therefore z=2\cos^2 110°-i\cdot 2\cdot\sin 110°\cdot\cos 110°$

$=-2\cos 110°(-\cos 110°+i\sin 110°)$

$=-2\cos 110°(\cos 70°+i\sin 70°)$

故 $|z|=-2\cos 110°$， $\theta=70°$

8、 設 $a,b\in\mathbb{R}$，$z_1=1+ai$ ， $z_2=b+4i$ 且 $\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\sqrt{2}$， $\arg(\frac{z_2}{z_1})=\frac{\pi}{4}$，則 $a=$_____， $b=$______。

答案：3, -2

解析：$\because \left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\sqrt{2}$ 且 $\arg(\frac{z_2}{z_1})=\frac{\pi}{4}$ $\therefore \frac{z_2}{z_1}=1+i$

$\therefore b+4i=(1+i)(1+ai)$， $b+4i=(1-a)+i(1+a)$ 故 $a=3$， $b=-2$

9、設 $z\in\mathbb{C}$ ， $\left|\frac{z+2}{z-2}\right|=5$ ， $\arg(\frac{z+2}{z-2})=\theta$ 且 $\cos\theta=\frac{3}{5}$， $\tan\theta<0$ 若 $z=a+bi$ （$a,b\in\mathbb{R}$），則 $a=$______， $b=$______。

答案：$\frac{12}{5}$ ， $\frac{4}{5}$

解析：$\because \left|\frac{z+2}{z-2}\right|=5$ ， $\arg(\frac{z+2}{z-2})=\theta$ 且 $\cos\theta=\frac{3}{5}$， $\tan\theta<0$

$\therefore \frac{z+2}{z-2}=5(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i)$ $\therefore (2-4i)z=8-8i$

$\therefore z=\frac{4}{5}(3+i)=\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i$ $\therefore a=\frac{12}{5}$ ， $b=\frac{4}{5}$

10、設 $z=24-7i$ 化爲極式時，其主輻角爲 θ ，則 $\cos\frac{\theta}{2}=$______， $\sin\frac{\theta}{2}=$______。

答案：$-\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$+\frac{\sqrt{2}}{10}$

解析：$z=25(\cos\theta+i\sin\theta)$　$\therefore \cos\theta=\frac{24}{25}$，$\sin\theta=\frac{-7}{25}$

又$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，$\therefore \cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\sin\frac{\theta}{2}=+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=+\frac{\sqrt{2}}{10}$

11、設$z+\frac{1}{z}=-\sqrt{3}$，則$z=$______，又$z^{200}=$______。

答案：$\frac{-\sqrt{3}\pm i}{2}$，$\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

解析：$z+\frac{1}{z}=-\sqrt{3}$　$\therefore z^2+\sqrt{3}z+1=0$，$z=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2}=\frac{-\sqrt{3}\pm i}{2}$

$\therefore z=(\cos150^\circ+i\sin150^\circ)$或$(\cos210^\circ+i\sin210^\circ)$，$z^{12}=1$

$\therefore z^{200}=z^8=(\cos120^\circ+i\sin120^\circ)$或$(\cos240^\circ+i\sin240^\circ)$，故$z^{200}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

12、令複數$z=2\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)$且$z\cdot i=2(\cos a\pi+i\sin a\pi)$，則實數$a=$______。

答案：$\frac{9}{14}$

解析：$\because i=\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}$

$$\because z\cdot i=2\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{2}\right)\right]=2\left(\cos\frac{9\pi}{14}+i\sin\frac{9\pi}{14}\right)，\quad \therefore a=\frac{9}{14}$$

13、二次方程式$x^2+4i=0$的二根爲______或______。

答案：$-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$，$\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

解析：$x^2=-4i=4(\cos270^\circ+i\sin270^\circ)$

$\therefore x_1=2(\cos135^\circ+i\sin135^\circ)=2(\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

$x_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

14、設複數$\frac{(\sin34^\circ-i\cos34^\circ)^2\cdot(\cos164^\circ+i\sin164^\circ)}{(\cos6^\circ-i\sin6^\circ)}=(\cos\theta+i\sin\theta)$且$0^\circ\le\theta<360^\circ$，則$\theta=$______。

答案：58°

解析：$\frac{(\cos(-56^\circ)+i\sin(-56^\circ))^2\cdot(\cos164^\circ+i\sin164^\circ)}{\cos(-6^\circ)+i\sin(-6^\circ)}=\cos58^\circ+i\sin58^\circ$　$\therefore \theta=58^\circ$

15、設 $z=\cos 132°+i\sin 132°$，若 $n\in\mathbb{N}$ 且 z^n 爲實數，則合於條件之最小正整數 $n=$______。

答案：15

解析：$\because z=\cos 132°+i\sin 132° \Rightarrow z^n=\cos(n\times 132°)+i\sin(n\times 132°)$

z^n 爲實數 $\Rightarrow \sin(n\times 132°)=0$ ，$n\times 132=k\times 180, k\in N$

$2^2\times 3\times 11\times n=2^2\times 3^2\times 5\times k$ ，故最小正整數 $n=3\times 5=15$

16、設 z 爲複數，試求 $|z-i|=|z+i|$ 之圖形。

答案：$|z-(0+i)|=|z-(0-i)\Rightarrow|$

設 $z=x+yi$ ，則 $|x+(y-1)i|=|x+(y+1)i|$

$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Rightarrow \quad y=0$

所以 $|z-i|=|z+i|$ 的圖形爲 x 軸。

17、求 $-12+5i$ 的平方根

答案：解 1 設 $(a+bi)^2=-12+5i$ 即可求出。

解 2 $z^2=-12+5i=13(\cos\theta+i\sin\theta)$, $\cos\theta=-\dfrac{12}{13}$ ，$\sin\theta=\dfrac{5}{13}$

$\therefore \theta\in \text{II} \Rightarrow \dfrac{\theta}{2}\in \text{I} \Rightarrow \cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{26}}$, $\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}=\dfrac{5}{\sqrt{26}}$

$\therefore -12+5i$ 之平方根爲 $\pm\sqrt{13}(\dfrac{1}{\sqrt{26}}+i\dfrac{5}{\sqrt{26}})=\pm(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{5\sqrt{2}}{2}i)$ 。

18、試將下列直角坐標改成極坐標：

(3) $(-\sqrt{3}, 1)$ (4) $(3, -\sqrt{3})$

答案： (3) $\tan\theta=\dfrac{1}{-\sqrt{3}}$ ，又點在第二象限，故 $\theta=\dfrac{5}{6}\pi$ ，$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$

故極坐標爲 $(2,\dfrac{5}{6}\pi)$ 。

(4) $\tan\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ，又點在第四象限，故 $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ ，$r=\sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

故極坐標爲 $(2\sqrt{3}, -\dfrac{\pi}{6})$ 。

19、解方程式：$z^4=i$

答案：$z^4=i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

$=\cos(2k\pi+\dfrac{\pi}{2})+i\sin(2k\pi+\dfrac{\pi}{2})$

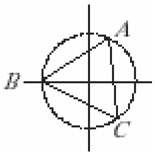
故 $z_k=\cos\dfrac{4k+1}{8}\pi+i\sin\dfrac{4k+1}{8}\pi$ ，其中 $k=0, 1, 2, 3$ 就得到四個根。

20、解方程式 $z^3=-8$ 得其解為何(以標準式表示之)？又將其所得之三個根描在高斯平面上，可得 A, B, C 三點，則△ABC 的面積為何？

答案：$z^3=8(\cos 180°+i\sin 180°)$ $\quad\therefore z_1=2(\cos 60°+i\sin 60°)=1+\sqrt{3}i$

$z_2=2(\cos 180°+i\sin 180°)=-2$

$z_3=2(\cos 300°+i\sin 300°)=1-\sqrt{3}i$



△ABC 面積為 $3\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 120°=3\sqrt{3}$

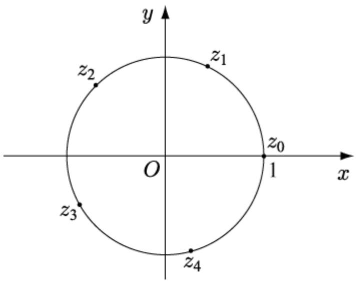
21、解方程式 $z^6-8+i(z^6+8)=0$ ，並將其解以極式表示之。

答案：$z^6-8+i(z^6+8)=0$ $\quad\therefore z^6=-8i=8(\cos 270°+i\sin 270°)$

$\therefore z_1=\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)$ $\quad z_2=\sqrt{2}(\cos 105°+i\sin 105°)$

$z_3=\sqrt{2}(\cos 165°+i\sin 165°)$ $\quad z_4=\sqrt{2}(\cos 225°+i\sin 225°)$

$z_5=\sqrt{2}(\cos 285°+i\sin 285°)$ $\quad z_6=\sqrt{2}(\cos 345°+i\sin 345°)$



22、利用棣美弗定理，求：$(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}})^{30}$

答案：方法一：$(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}})^{30}=2^{-15}[2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})]^{30}=2^{15}(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)=-2^{15}$

方法二：$(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}})^{30}=\frac{1}{2^{15}}(\sqrt{3}+i)^{30}=\frac{1}{2^{15}}\cdot(2^{15}\cdot i)^2=-(2^{15})=-32768$

23、利用棣美弗公式推導四倍角公式求 $\cos 4\theta=$？，$\sin 4\theta=$？

答案：由 $\cos 4\theta+i\sin 4\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^4$

$=\cos^4\theta+4\cos^3\theta\cdot i\sin\theta+6\cos^2\theta\cdot(i\sin\theta)^2+4\cos\theta(i\sin\theta)^3+(i\sin\theta)^4$

$=(\cos^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta)+i(4\cos^3\theta\sin\theta-4\cos\theta\sin^3\theta)$

得 $\cos 4\theta=\cos^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta$

$=\cos^4\theta-6\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)+(1-\cos^2\theta)^2=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$

$\sin 4\theta=4\cos^3\theta\sin\theta-4\cos\theta\sin^3\theta$

24、在公式$\dfrac{1-z^n}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$中，令$z=\cos\theta+i\sin\theta$ ，試證

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos(n-1)\theta=\frac{\sin(\frac{n}{2})\theta\cos\frac{(n-1)}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin(n-1)\theta=\frac{\sin(\frac{n}{2})\theta\sin\frac{(n-1)}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

答案：$\dfrac{1-z^n}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$

$$\Rightarrow\frac{1-(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{1-(\cos\theta+i\sin\theta)}=1+(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+\cdots+[\cos(n-1)\theta+i\sin(n-1)\theta]$$

$$\Rightarrow\frac{(1-\cos n\theta)-i\sin n\theta}{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}=1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos(n-1)\theta+i[\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin(n-1)\theta]$$

$$=\frac{[(1-\cos n\theta)(1-\cos\theta)+\sin\theta\sin n\theta]+i[\sin\theta(1-\cos n\theta)-\sin n\theta(1-\cos\theta)]}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}$$

由虛實原理即得證

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos(n-1)\theta=\frac{\sin(\frac{n}{2})\theta\cos\frac{(n-1)}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin(n-1)\theta=\frac{\sin(\frac{n}{2})\theta\sin\frac{(n-1)}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

25、設$\theta=\dfrac{2\pi}{11}$ ，則

(　　) $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta=$ (A) -1　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) 0　(D) $\dfrac{1}{2}$　(E) 1

(　　) $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin 10\theta=$ (A) -1　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) 0　(D) $\dfrac{1}{2}$　(E) 1

答案： (1) (B)　(2) (C)

解析：$\because\theta=\dfrac{2\pi}{11}$

$\therefore\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos 11\theta=0$，$\cos 11\theta=1$

又$\cos\theta=\cos 10\theta$，$\cos k\theta=\cos(11-k)\theta$

$\therefore 2(\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos 5\theta)+1=0$

$\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos 5\theta=-\dfrac{1}{2}$

$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin 11\theta=0$，$\sin 11\theta=0$

$\therefore \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin 10\theta = 0$