高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：95.07.28					
範圍	3-6 反三角函數	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(E) 設 $\cos\theta = \frac{3}{5}$ 且 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ，則 $\theta =$

(A) $\cos^{-1}\frac{3}{5}$ (B) $\pi - \cos^{-1}\frac{3}{5}$ (C) $\pi + \cos^{-1}\frac{3}{5}$ (D) $\frac{3\pi}{2} + \cos^{-1}\frac{3}{5}$ (E) $2\pi - \cos^{-1}\frac{3}{5}$

2、(C) 下列敘述何者錯誤？

(A)若 $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ，恆有 $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$

(B)反餘弦函數定義域為 $[-1, 1]$，值域為 $[0, \pi]$

(C)對任意 $y \in \mathbb{R}$ ，恆有 $\tan^{-1}(-y) = \tan^{-1}y$

(D)對任意 $y \in [-1, 1]$，恆有 $\cos(\cos^{-1}y) = y$

(E) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$

3、(E) 設 $\cos\theta = -\frac{12}{13}$ 且 $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ，則 $\theta =$ (A) $\cos^{-1}(-\frac{12}{13})$ (B) $\frac{\pi}{2} + \cos^{-1}(-\frac{12}{13})$

(C) $\pi - \cos^{-1}(-\frac{12}{13})$ (D) $\pi + \cos^{-1}(-\frac{12}{13})$ (E) $2\pi - \cos^{-1}(-\frac{12}{13})$

二、填充題 (每題 10 分)

4、求下列各式的值：

(1) $\sin(\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}) =$______；(2) $\cos(\cos^{-1}\frac{1}{2}) =$______；(3) $\tan(\tan^{-1}\sqrt{3}) =$______。

答案：(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ；(2) $\frac{1}{2}$ ；(3) $\sqrt{3}$

解析：(1)令 $\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = x$ ，$\therefore \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，$\therefore \sin(\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)令 $\cos^{-1}\frac{1}{2} = y$ ，$\therefore \cos y = \frac{1}{2}$ ，$\therefore \cos(\cos^{-1}\frac{1}{2}) = \cos y = \frac{1}{2}$

(3)令 $\tan^{-1}\sqrt{3} = z$ ，$\therefore \tan z = \sqrt{3}$ ，$\therefore \tan(\tan^{-1}\sqrt{3}) = \tan z = \sqrt{3}$

5、設 $\sin 37° = \frac{3}{5}$ ，則 $\cos^{-1}(-\frac{4}{5}) =$______, $\tan^{-1}(-\frac{3}{4}) =$______。

答案：$143°$, $-37°$

解析：$\cos^{-1}(-\frac{4}{5}) = 143°$, $\tan^{-1}(-\frac{3}{4}) = -37°$

6、求下列各式的值：(1) $\sin^{-1}(\sqrt{2}) =$______；(2) $\cos(\cos^{-1}\sqrt{2}) =$______。

答案：(1)無意義；(2)無意義

解析：(1) $\because \sqrt{2} \notin [-1, -1]$ ，$\therefore \sin^{-1}(\sqrt{2})$ 無意義

(1) $\because \sqrt{2} \notin [-1, 1]$ ，$\therefore \cos^{-1}\sqrt{2}$ 無意義，$\therefore \cos(\cos^{-1}\sqrt{2})$ 無意義

7、設 $0 \le x \le 2\pi$ ，若 $3\cos^2 x + 5\cos x - 2 = 0$ ，則 $x =$______或______。

$\boxed{答案}$：$\cos^{-1}\frac{1}{3}$ ，$2\pi-\cos^{-1}\frac{1}{3}$

$\boxed{解析}$：$(3\cos x-1)(\cos x+2)=0$　$\therefore \cos x=\frac{1}{3}$ ，-2 (不合)，$\therefore x=\cos^{-1}\frac{1}{3}$ 或 $2\pi-\cos^{-1}\frac{1}{3}$

8、$\triangle ABC$ 中，$\angle A=45°$，$\angle B=\tan^{-1}\frac{1}{3}$，則$\angle C=$______。

$\boxed{答案}$：$\pi-\tan^{-1}2$ 或 $\pi+\tan^{-1}(-2)$

$\boxed{解析}$：$\triangle ABC$ 中，$\angle A=45°$，$\angle B=\tan^{-1}\frac{1}{3}$　$\therefore \tan A=1$，$\tan B=\frac{1}{3}$

$\tan C=-\tan(A+B)=-2$　$\therefore \angle C=\pi-\tan^{-1}2$ 或 $\pi+\tan^{-1}(-2)$

9、在$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=3$，$\angle A=\sin^{-1}\frac{\sqrt{11}}{6}$，則$\overline{BC}=$______或______。

$\boxed{答案}$：$\sqrt{3}$ ，$\sqrt{23}$

$\boxed{解析}$：$\angle A=\sin^{-1}\frac{\sqrt{11}}{6}$　$\therefore \cos A=\frac{5}{6}$或$-\frac{5}{6}$

$\therefore \overline{BC}^2=2^2+3^2-2\times 2\times 3\times(\pm\frac{5}{6})$　$\therefore \overline{BC}=\sqrt{3}$或$\sqrt{23}$

10、$\cos^{-1}(\sin 1)=$______。

$\boxed{答案}$：$\frac{\pi}{2}-1$

$\boxed{解析}$：$\because \sin 1=\cos(\frac{\pi}{2}-1)$ ，$\therefore \cos^{-1}(\sin 1)=\cos^{-1}(\cos(\frac{\pi}{2}-1))=\frac{\pi}{2}-1$　($\because 0\le\frac{\pi}{2}-1\le\pi$)

11、$\sin(\sin^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{5}})+\cos^{-1}(\frac{3}{\sqrt{10}}))=$______。

$\boxed{答案}$：$-\frac{\sqrt{2}}{10}$

$\boxed{解析}$：令$\alpha=\sin^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{5}})\Rightarrow \sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$ $(\because -\frac{\pi}{2}<\alpha<0)$

$\beta=\cos^{-1}(\frac{3}{\sqrt{10}})\Rightarrow \cos\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$ $(\because 0<\beta<\frac{\pi}{2})$

$\therefore$原式$=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=(-\frac{1}{\sqrt{5}})\times\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{50}}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$

12、求下列各式的值：

(1) $\sin^{-1}(\sin 2)=$______；(2) $\cos^{-1}(\cos\frac{4\pi}{3})=$______；(3) $\tan^{-1}(\tan\frac{\pi}{3})=$______。

$\boxed{答案}$：(1) $\pi-2$ ；(2) $\frac{2}{3}\pi$ ；(3) $\frac{\pi}{3}$

$\boxed{解析}$：(1) $\because 2\notin[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ，$\therefore \sin 2=\sin(\pi-2)$ ，$\therefore \sin^{-1}(\sin 2)=\sin^{-1}(\sin(\pi-2))=\pi-2$

(2) $\because \frac{4\pi}{3}\notin[0,\pi]$ ，$\therefore \cos\frac{4}{3}\pi=\cos\frac{2}{3}\pi=\frac{-1}{2}$ ，$\therefore \cos^{-1}(\cos\frac{4}{3}\pi)=\cos^{-1}(\cos\frac{2}{3}\pi)=\frac{2}{3}\pi$

(3) $\because \frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，$\therefore \tan^{-1}(\tan\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$

13、 $\cos(2\sin^{-1}(-\frac{4}{5})) =$ ______ 。

答案：$-\frac{7}{25}$

解析：令 $\theta = \sin^{-1}(-\frac{4}{5})$ ，$\therefore \sin\theta = \sin(\sin^{-1}(\frac{-4}{5})) = -\frac{4}{5}$

$\therefore$ 原式 $= \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\cdot(-\frac{4}{5})^2 = -\frac{7}{25}$

14、求下列各式的值：

(1) $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) =$ ______；(2) $\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{2}}{2}) =$ ______；(3) $\tan^{-1}(-1) =$ ______ 。

答案：(1) $\frac{\pi}{3}$ ；(2) $\frac{3\pi}{4}$ ；(3) $-\frac{\pi}{4}$

解析：(1)設 $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \theta_1$ 則 $\sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $-\frac{\pi}{2} \le \theta_1 \le \frac{\pi}{2}$ ，$\therefore \theta_1 = \frac{\pi}{3}$ 即 $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$

(2)設 $\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \theta_2$ 則 $\cos\theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $0 \le \theta_2 \le \pi$ ，$\therefore \theta_2 = \frac{3\pi}{4}$ 即 $\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\pi}{4}$

(3)設 $\tan^{-1}(-1) = \theta_3$ 則 $\tan\theta_3 = -1$ 且 $-\frac{\pi}{2} \le \theta_3 \le \frac{\pi}{2}$ ，$\therefore \theta_3 = -\frac{\pi}{4}$ 即 $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

15、 $\triangle ABC$ 中，$\overline{CA} = 5,\ \overline{AB} = 6,\ \angle A = \cos^{-1}\frac{2}{3}$ ，則 $\overline{BC} =$ ______ 。

答案：$\sqrt{21}$

解析：$\angle A = \cos^{-1}\frac{2}{3},\ \therefore \cos A = \cos(\cos^{-1}\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ ，$\therefore \cos A = \frac{25 + 36 - \overline{BC}^2}{2\cdot 5\cdot 6} = \frac{2}{3}$

$\therefore \overline{BC}^2 = 21,\ \overline{BC} = \sqrt{21}$

16、在 $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{BC} = 12$，$\overline{CA} = 10$，$\angle B = 30^\circ$ ，求 $\angle A$ 。

答案：依正弦定理 $\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{CA}}{\sin B} \Rightarrow \frac{12}{\sin A} = \frac{10}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{12}{\sin A} = 20 \Rightarrow \sin A = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

但 $0^\circ < \angle A < 180^\circ$ ，所以 $\angle A = \sin^{-1}\frac{3}{5}$ 或 $\angle A = 180^\circ - \sin^{-1}\frac{3}{5}$

17、若一三角形三邊之長爲 5, 6, 7，試求最大內角。

答案：已知 $a = 5,\ b = 6,\ c = 7$

所以最大內角爲 $\angle C$，由 $\cos C = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2\times 5\times 6} = \frac{1}{5}$ ，故最大內角爲 $\cos^{-1}\frac{1}{5}$ 。

18、設函數 $f(x) = 3\cos x - 4\sin x,\ \ 0 \le x \le 2\pi$ ，之最大值發生於 $x = \alpha$ 處，求角 α 。

答案：$f(x)$ 之最大值發生於 $x = \alpha$ 處，此時

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5} > 0$ ，$\sin\alpha = \frac{-4}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = -\frac{4}{5} < 0$

可見 α 爲第四象限角，故 $\alpha = 2\pi - \cos^{-1}\frac{3}{5}$ ，即 $\alpha = 2\pi - \sin^{-1}\frac{4}{5}$