高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：95.06.21					
範圍	3-5 正餘弦疊合	班級		姓名	
		座號			

一、單一選擇題 (每題 10 分)

1、(D) 關於 $f(x) = \sin x + \cos x$ 的圖形，下列敘述何者正確？

(A)週期爲 π (B)與 y 軸交點爲$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (C)與 x 軸交點爲$(\frac{n\pi}{4}, 0)$

(D)圖形對稱於 $x = \frac{\pi}{4}$ (E)振幅爲$\frac{1}{\sqrt{2}}$

解析： $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

(A)週期爲 2π，(B) $x=0\Rightarrow y=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=1$，與 y 軸交點爲(0, 1)

(C) $y=0\Rightarrow 0=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=n\pi\Rightarrow x=\frac{(4n-1)\pi}{4}$

(E)振幅爲$\sqrt{2}$

2、(A) 函數 $f(x)=\frac{\sin x\cdot\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ 之最大值爲

(A)$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (B)$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (C)1 (D)$\sqrt{2}-1$ (E)$\sqrt{3}-1$

解析： $y=\frac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}=\frac{\sin x\cos x(\sin x+\cos x-1)}{(\sin x+\cos x+1)(\sin x+\cos x-1)}$

$=\frac{\sin x\cos x(\sin x+\cos x-1)}{2\sin x\cos x}=\frac{\sin x+\cos x-1}{2}=\frac{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})-1}{2}$

故 y 最大值爲$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，最小值爲$\frac{-\sqrt{2}-1}{2}$

二、填充題 (每題 10 分)

3、 $y=2\sin x-2\sqrt{3}\cos x$ 的圖形係將 $y=4\sin x$ 的圖形往右平移 k 個單位，且 y 的最大值爲 M，最小值爲 m，則序對 $(k,M,m)=$ ________________。

答案： $(\frac{\pi}{3},4,-4)$

解析： $y=2\sin x-2\sqrt{3}\cos x=4(\sin x\cdot\frac{1}{2}-\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})=4\sin(x-\frac{\pi}{3})$

即 $y=2\sin x-2\sqrt{3}\cos x$ 是將 $y=4\sin x$ 的圖形往右移$\frac{\pi}{3}$個單位

又 $\left|\sin(x-\frac{\pi}{3})\right|\le 1$, $\therefore -4\le 4\sin(x-\frac{\pi}{3})\le 4$，故 $(k,M,m)=(\frac{\pi}{3},4,-4)$

4、 試將 $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos\theta-(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin\theta$ 疊合成正弦函數爲______。

答案： $4\sin(15^\circ-\theta)$ 或 $4\sin(\theta+165^\circ)$

解析： $y=(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos\theta-(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin\theta=4(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cos\theta-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\sin\theta)$

$=4(\sin 15°\cdot\cos\theta-\cos 15°\cdot\sin\theta)=4\sin(15°-\theta)$

5、 設 $270°<A<360°$ 且 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin 2005°$，若 $A=m°$，則 $m=$__________。

答案：305

解析：$\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin 2005°$

$\Rightarrow\ 2(\sin A\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos A\cdot\dfrac{1}{2})=2\sin 2005°$

$\Rightarrow\ 2(\sin A\cdot\cos 30°+\cos A\cdot\sin 30°)=2\sin 2005°$

$\Rightarrow\ 2\sin(A+30°)=2\sin 2005°$

$\Rightarrow\ \sin(A+30°)=\sin 2005°=\sin(90°\times 22+25°)$

$\Rightarrow\ \sin(A+30°)=-\sin 25°$

$\because\ 270°<A<360°\Rightarrow\sin(A+30°)=-\sin 25°=\sin 335°\Rightarrow\ A+30°=335°\ \Rightarrow\ A=305°$

6、 設 $f(x)=\cos(\dfrac{\pi}{3}-x)-\cos x+1$ 且 $\dfrac{3}{2}\pi\le x\le 2\pi$，則

$x=$________時，$f(x)$ 有最大值爲________；又 $x=$______時，$f(x)$ 有最小值爲_______。

答案：2π ，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{10}{6}\pi$ ，0

解析：$f(x)=\cos(\dfrac{\pi}{3}-x)-\cos x+1=1+\sin(x-\dfrac{\pi}{6})$

$\therefore\dfrac{3}{2}\pi\le x\le 2\pi\qquad\therefore\dfrac{4}{3}\pi\le x-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{11}{6}\pi$

$-1\le\sin(x-\dfrac{\pi}{6})\le-\dfrac{1}{2}\qquad\therefore 0\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$

$x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{11}{6}\pi$ 時，即 $x=2\pi$ 時，$f(x)=\dfrac{1}{2}$ 爲最大值

$x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi$ 時，即 $x=\dfrac{10}{6}\pi$ 時，$f(x)=0$ 爲最小值

7、 設函數 $f(x)=3\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin x\cos x$，則 $f(x)$ 的最大值爲_____，最小值爲 _______。

答案：$1+\sqrt{5}$ ，$1-\sqrt{5}$

解析：$f(x)=3\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin x\cos x=3(\dfrac{1+\cos 2x}{2})-(\dfrac{1-\cos 2x}{2})+\sin 2x$

$=1+\sin 2x+2\cos 2x=1+\sqrt{5}\sin(2x+\phi)$，$\therefore$最大值爲$1+\sqrt{5}$，最小值爲$1-\sqrt{5}$

8、化簡 $\dfrac{1}{\sin 190°}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 190°}=$______。

答案：-4

解析：$\dfrac{1}{\sin 190°}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 190°}=\dfrac{\cos 190°-\sqrt{3}\sin 190°}{\sin 190°\cdot\cos 190°}=\dfrac{2\cos(190°+60°)}{\dfrac{1}{2}\sin 380°}=4\cdot\dfrac{(-\sin 20°)}{\sin 20°}=-4$

9、 設函數 $f(x)=3\sin x\cos x-2\sin x-2\cos x+1$，則 $f(x)$ 的最大值爲________，最小值爲

__________。

答案：$\dfrac{5}{2}+2\sqrt{2}$，$-\dfrac{7}{6}$

解析：令 $\sin x+\cos x=t$，則 $(\sin x+\cos x)^2=t^2\Rightarrow 1+2\sin x\cos x=t^2$

故 $\sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$ ，又由疊合知 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\Rightarrow -\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

$f(x)=3\sin x\cos x-2\sin x-2\cos x+1=3(\dfrac{t^2-1}{2})-2t+1=\dfrac{3}{2}(t-\dfrac{2}{3})^2-\dfrac{7}{6}$

又 $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$ $\quad\therefore -\dfrac{7}{6}\le f(x)\le\dfrac{5}{2}+2\sqrt{2}$ ，故最大值爲 $\dfrac{5}{2}+2\sqrt{2}$ ，最小值爲 $-\dfrac{7}{6}$

10、函數 $f(x)=4\cos 2x-3\sin 2x$ 且 $0\le x\le\pi$ ，在 $x=\alpha$ 時有最小值，則 2α 爲第________象限角且 $\sin\alpha=$_________。

答案：二，$\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

解析：$f(x)=4\cos 2x-3\sin 2x$ 且 $0\le x\le\pi$ $\quad\therefore -5\le f(x)\le 5$

且當 $\sin 2x=\dfrac{3}{5},\ \cos 2x=-\dfrac{4}{5}$ 時，$f(x)$ 有最小值，故 2α 爲第二象限角

$\because \dfrac{\pi}{2}<2\alpha<\pi$ $\quad\therefore \dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ ，$\therefore \sin\alpha=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

11、設 $y=\cos x-\sqrt{3}\sin x-1$

(1)當 $0\le x\le 2\pi$ 時，y 的最大值爲_________，最小值爲__________。

(2)當 $0\le x\le\pi$ 時，y 的最大值爲_________，最小值爲________，且發生最小值時 $x=$________。

答案：(1)1, -3　(2)0, -3, $\dfrac{2\pi}{3}$

解析：(1) $y=2\cos(x+60°)-1$ $\quad\therefore -3\le y\le 1$，∴最大值爲 1，最小值爲 -3

(2)若 $0\le x\le\pi$ $\quad\therefore \dfrac{\pi}{3}\le x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{4\pi}{3},\ -1\le\cos(x+\dfrac{\pi}{3})\le\dfrac{1}{2}$ ，

$-3\le y\le 0$ ，即最大值爲 0，最小值爲 -3

且當 $\cos(x+\dfrac{\pi}{3})=-1$ 即 $x+\dfrac{\pi}{3}=\pi\Rightarrow x=\dfrac{2\pi}{3}$ 時 y 有最小值

12、設 $0\le x\le\pi$ ，則 $2\sin^2 x-\sin 2x$ 的最大值爲________，最小值爲_________。

答案：$1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}$

解析：$\because 0\le x\le\pi$

$\therefore f(x)=2\sin^2 x-\sin 2x=(1-\cos 2x)-\sin 2x=1-\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$

故最大值爲 $1+\sqrt{2}$ ，最小值爲 $1-\sqrt{2}$

13、化簡 $\dfrac{1}{\csc 10°-\sqrt{3}\sec 10°}$ 。

答案：$\dfrac{1}{\csc 10°-\sqrt{3}\sec 10°}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sin 10°}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10°}}=\dfrac{\sin 10°\cos 10°}{\cos 10°-\sqrt{3}\sin 10°}$

$=\dfrac{\sin 10°\cos 10°}{2(\dfrac{1}{2}\cos 10°-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°)}=\dfrac{\dfrac{1}{2}(2\sin 10°\cos 10°)}{2(\sin 30°\cos 10°-\cos 30°\sin 10°)}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\sin 20°}{2\sin 20°}=\dfrac{1}{4}$

14、設函數 $f(x)=3\cos x-4\sin x,\ \ 0\le x\le 2\pi$ ，之最大值發生於 $x=\alpha$ 處，求 $\tan\alpha$ 。

$\boxed{\text{答案}}$： $f(x)=3\cos x-4\sin x,\ \ 0\le x\le 2\pi$

$$
\begin{aligned}
f(x)&=3\cos x-4\sin x\\
&=5(\cos x\cdot\frac{3}{5}-\sin x\cdot\frac{4}{5})\\
&=5\cos(x+\theta) \qquad \text{其中}\cos\theta=\frac{3}{5},\sin\theta=\frac{4}{5},\ \ 0<\theta<\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$f(x)$ 之最大值發生於 $x=\alpha$ 處， $\theta<\alpha+\theta<2\pi+\theta$ ，此時 $\alpha+\theta=2\pi$ ，

$\cos\alpha=\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta=\dfrac{3}{5}>0$ ； $\sin\alpha=\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta=-\dfrac{4}{5}<0$ ，

故 α 爲第四象限角，故 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{4}{3}$

15、設 $0\le x\le\dfrac{2\pi}{3},\ y=\cos^2 x+2\sin x+2$ ，則 y 的最大值與最小值各爲何？

$\boxed{\text{答案}}$： $y=\cos^2 x+2\sin x+2=-\sin^2 x+2\sin x+3=-(\sin x-1)^2+4$

$\because 0\le x\le\dfrac{2\pi}{3},\ \therefore 0\le\sin x\le 1$ ，當 $\sin x=1$ 時，y 最大值 4；當 $\sin x=0$ 時，y 最小值 3

16、試求 $y=\dfrac{1+\sin x}{3+\cos x}$ 之最大值與最小值。

$\boxed{\text{答案}}$：令 $y=\dfrac{1+\sin x}{3+\cos x}\Rightarrow 3y+y\cos x=1+\sin x\Rightarrow\sin x-y\cos x=3y-1$

$\sqrt{1+y^2}\sin(x-\theta)=3y-1\Rightarrow\sin(x-\theta)=\dfrac{3y-1}{\sqrt{1+y^2}}$ ，又 $|\sin(x-\theta)|\le 1$

$\left|\dfrac{3y-1}{\sqrt{1+y^2}}\right|\le 1\Rightarrow(3y-1)^2\le y^2+1$ ， $9y^2-6y+1\le y^2+1\Rightarrow 8y^2-6y\le 0$

$8y(y-\dfrac{3}{4})\le 0\Rightarrow\ 0\le y\le\dfrac{3}{4}$ ，故 $\dfrac{1+\sin x}{3+\cos x}$ 之最大值爲 $\dfrac{3}{4}$ ，最小值爲 0

17、設 $f(x)=(\sin x+1)(\cos x-1)$

(1)求 $f(x)$ 的最大值與最小值。

(2)若 $\dfrac{\pi}{4}\le x\le\pi$ 時 $f(x)$ 的最大值與最小值爲何？

$\boxed{\text{答案}}$： $f(x)=(\sin x+1)(\cos x-1)=\sin x\cos x+\cos x-\sin x-1$

令 $t=\cos x-\sin x$ ，則 $\sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$ ，且由疊合知 $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

$\therefore f(x)=\dfrac{1-t^2}{2}+t-1=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2\quad\ \therefore-\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\le f(x)\le 0$

若 $\dfrac{\pi}{4}\le x\le\pi$ ，$\because t=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4}),\ \ \dfrac{\pi}{2}\le x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{5\pi}{4}$

$\therefore-\sqrt{2}\le t\le 0$ ，故 $-\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\le f(x)\le-\dfrac{1}{2}$