高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：95.06.20					
範圍	3-4 積與和、差的互換	班級		姓名	
		座號			

一、單一選擇題 (每題 10 分)

1、(C) 求 $\cos 47^\circ - \cos 87^\circ =$ (A) $-\sin 134^\circ \sin 40^\circ$ (B) $-2\sin 134^\circ \sin 40^\circ$ (C) $2\sin 67^\circ \sin 20^\circ$ (D) $-2\sin 67^\circ \sin 20^\circ$ (E) $-\sin 67^\circ \sin 20^\circ$

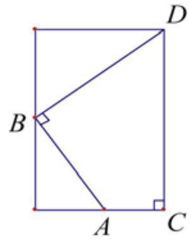
解析：$\cos 47^\circ - \cos 87^\circ = -2\sin(\frac{47^\circ + 87^\circ}{2})\sin(\frac{47^\circ - 87^\circ}{2}) = 2\sin 67^\circ \sin 20^\circ$

2、(D) 求 $\cos 31^\circ + \sin 9^\circ =$ (A) $\sin 40^\circ - \sin 22^\circ$ (B) $\frac{1}{2}(\sin 40^\circ - \sin 22^\circ)$ (C) $\cos 56^\circ \cos 25^\circ$

(D) $2\cos 56^\circ \cos 25^\circ$ (E) $2\cos 112^\circ \cos 50^\circ$

解析：$\cos 31^\circ + \sin 9^\circ = \cos 31^\circ + \cos 81^\circ = 2\cos(\frac{31^\circ + 81^\circ}{2})\cos(\frac{31^\circ - 81^\circ}{2}) = 2\cos 56^\circ \cos 25^\circ$

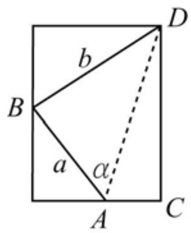
3、(B) 如下圖 $\angle BAC = \theta, \angle ABD = \angle ACD = 90^\circ, \overline{AB} = a, \overline{BD} = b$。下列選項何者可以表示 $\overline{CD}$？ (A) $a\sin\theta + b\cos\theta$ (B) $a\sin\theta - b\cos\theta$ (C) $a\cos\theta - b\sin\theta$ (D) $a\cos\theta + b\sin\theta$ (E) $a\sin\theta + b\tan\theta$



解析：連 $\overline{AD}$，設 $\angle BAD = \alpha$

$\overline{CD} = \overline{AD}\cdot\sin(\theta - \alpha) = \overline{AD}(\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha)$

$= \overline{AD}(\sin\theta\cdot\frac{a}{AD} - \cos\theta\cdot\frac{b}{AD}) = a\sin\theta - b\cos\theta$



4、(E) 若 $\frac{\sin 17^\circ - \cos 47^\circ}{\cos 17^\circ + \sin 47^\circ} = \tan\theta$ 且 $0^\circ \le \theta < 180^\circ$，則 $\theta =$

(A) 13° (B) 30° (C) 60° (D) 103° (E) 167°

解析：

$\frac{\sin 17^\circ - \cos 47^\circ}{\cos 17^\circ + \sin 47^\circ} = \frac{\cos 73^\circ - \cos 47^\circ}{\sin 73^\circ + \sin 47^\circ} = \frac{-2\sin 60^\circ \sin 13^\circ}{2\sin 60^\circ \cos 13^\circ} = -\tan 13^\circ = \tan 167^\circ$

5、(C) $\cos 37.5^\circ \cdot \cos 7.5^\circ =$ (A) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$ (E) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

解析：$\cos 37.5^\circ \cdot \cos 7.5^\circ = \frac{1}{2}(\cos 45^\circ + \cos 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$

6、(B) 求 $\sin 63^\circ \cos 101^\circ =$ (A) $\sin 164^\circ - \sin 38^\circ$ (B) $\frac{1}{2}(\sin 164^\circ - \sin 38^\circ)$

(C) $\frac{1}{2}(\sin 164^\circ + \sin 38^\circ)$ (D) $\sin 82^\circ + \sin 19^\circ$ (E) $\frac{1}{2}(\sin 82^\circ - \sin 19^\circ)$

解析：$\sin 63^\circ \cos 101^\circ = \frac{1}{2}[\sin(63^\circ + 101^\circ) + \sin(63^\circ - 101^\circ)] = \frac{1}{2}(\sin 164^\circ - \sin 38^\circ)$

二、填充題 (每題 10 分)

7、設 $\theta = \frac{\pi}{20}$，則 $\frac{\sin 6\theta \cos 7\theta}{\sin\theta - \sin 7\theta}$ 之值爲______。

答案：$-\frac{1}{2}$

解析：$\because \theta=\dfrac{\pi}{20}\Rightarrow 10\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ，$\therefore \sin 6\theta=\cos 4\theta$， $\cos 7\theta=\sin 3\theta$

故 $\dfrac{\sin 6\theta\cos 7\theta}{\sin\theta-\sin 7\theta}=\dfrac{\sin 6\theta\cos 7\theta}{2\cos 4\theta\sin(-3\theta)}=-\dfrac{1}{2}$

8、$\sin 55^\circ-\cos 95^\circ-\sin 115^\circ=$______。

答案：0

解析：原式$=\sin 55^\circ+\sin 5^\circ-\sin 115^\circ=\sin 55^\circ+2\cos 60^\circ\sin(-55^\circ)=\sin 55^\circ-\sin 55^\circ=0$

9、$\cos 17^\circ\cos 43^\circ+\cos 43^\circ\cos 103^\circ+\cos 103^\circ\cos 163^\circ=$______。

答案：$\dfrac{3}{4}$

解析：$\cos 17^\circ\cos 43^\circ+\cos 43^\circ\cos 103^\circ+\cos 103^\circ\cos 163^\circ$

$=\dfrac{1}{2}[(\cos 60^\circ+\cos 26^\circ)+(\cos 146^\circ+\cos 60^\circ)+(\cos 266^\circ+\cos 60^\circ)]$

$=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}(\cos 26^\circ+\cos 146^\circ+\cos 266^\circ)$

$=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}(\cos 26^\circ+2\cos 206^\circ\cos 60^\circ)$

$=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}(\cos 26^\circ-2\cos 26^\circ\cdot\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{4}$

10、設$\cos 2\theta=\dfrac{4}{5}$，則$\tan(\theta+60^\circ)\cdot\tan(\theta-60^\circ)=$______。

答案：$-\dfrac{13}{3}$

解析：$\because \cos 2\theta=\dfrac{4}{5}$ ，

$\therefore \tan(\theta+60^\circ)\cdot\tan(\theta-60^\circ)=\dfrac{2\sin(\theta+60^\circ)\sin(\theta-60^\circ)}{2\cos(\theta+60^\circ)\cos(\theta-60^\circ)}=\dfrac{-\cos 2\theta+\cos 120^\circ}{\cos 2\theta+\cos 120^\circ}=-\dfrac{13}{3}$

11、求$\cos^2\theta+\cos^2(\theta+\dfrac{\pi}{3})+\cos^2(\theta+\dfrac{2\pi}{3})=$______。

答案：$\dfrac{3}{2}$

解析：

原式$=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}+\dfrac{1+\cos(2\theta+\frac{2\pi}{3})}{2}+\dfrac{1+\cos(2\theta+\frac{4\pi}{3})}{2}$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}[\cos 2\theta+\cos(2\theta+\dfrac{2\pi}{3})+\cos(2\theta+\dfrac{4\pi}{3})]$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}[\cos 2\theta+2\cos(2\theta+\pi)\cos(-\dfrac{\pi}{3})]$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}[\cos 2\theta-2\cos(2\theta)\cos\dfrac{\pi}{3}]=\dfrac{3}{2}$

12、設$\sin x+\sin y=\dfrac{1}{2}$, $\cos x+\cos y=\dfrac{1}{3}$，則$\tan\dfrac{x+y}{2}=$______，$\sin(x+y)=$______。

答案：$\frac{3}{2}$；$\frac{12}{13}$

解析：$\sin x+\sin y=\frac{1}{2}\Rightarrow 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}\cdots\cdots$①

$\cos x+\cos y=\frac{1}{3}\Rightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{3}\cdots\cdots$②

$\frac{①}{②}$得$\frac{\sin\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}}=\frac{3}{2}\Rightarrow\tan\frac{x+y}{2}=\frac{3}{2}$，$\sin(x+y)=\frac{2\tan\frac{x+y}{2}}{1+\tan^2\frac{x+y}{2}}=\frac{2\times\frac{3}{2}}{1+(\frac{3}{2})^2}=\frac{12}{13}$

13、設$\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$，則$\frac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{\sin 5\alpha+\sin 3\alpha}=$______，$\frac{\cos 3\alpha-\cos\alpha}{\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}=$______。

答案：$\frac{3}{2}$，$-\frac{3}{7}$

解析：$\frac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{\sin 5\alpha+\sin 3\alpha}=\frac{2\cos 2\alpha\cos\alpha}{2\sin 4\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\frac{1}{2\sin 2\alpha}=\frac{3}{2}$

$\frac{\cos 3\alpha-\cos\alpha}{\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}=\frac{-2\sin 2\alpha\sin\alpha}{2\cos 4\alpha\sin\alpha}=\frac{-\sin 2\alpha}{1-2\sin^2 2\alpha}=-\frac{3}{7}$

14、化簡$\frac{(\cos 6\theta-\cos 4\theta)(\sin 5\theta-\sin\theta)}{(\sin 8\theta+\sin 2\theta)(\cos 3\theta-\cos\theta)}=$______。

答案：1

解析：原式$=\frac{-2\sin 5\theta\sin\theta\cdot 2\cos 3\theta\sin 2\theta}{2\sin 5\theta\cdot\cos 3\theta\cdot(-2\sin 2\theta\sin\theta)}=1$

15、$\cos 80°\cdot\sin 18°+\sin 74°\cdot\cos 44°-\sin 19°\sin 11°$之值爲______。

答案：$\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

解析：原式$=\frac{1}{2}[(\sin 98°-\sin 62°)+(\sin 118°+\sin 30°)+(\cos 30°-\cos 8°)]$

$=\frac{1}{2}[\cos 8°-\sin 62°+\sin 62°+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos 8°]=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

16、(1)用積化和差將$\sin 40°\cdot\sin 80°$化爲$a\cos\theta+b$且$0°\le\theta\le 90°$，a, b爲實數，則

$a=$______；$b=$______。

(2)$\sin 20°\cdot\sin 40°\sin 80°$之值爲______。

答案：(1) $\frac{1}{2}$；$\frac{1}{4}$ (2)$\frac{\sqrt{3}}{8}$

解析：(1)$\sin 40°\sin 80°=-\frac{1}{2}(\cos 120°-\cos 40°)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 40°$，$\therefore b=\frac{1}{4}$

(2)$\sin 20°\sin 40°\sin 80°=\sin 20°(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 40°)=\frac{1}{4}\sin 20°+\frac{1}{4}(\sin 60°-\sin 20°)=\frac{\sqrt{3}}{8}$

17、$\cos 70°-\cos 30°+\cos 50°-\cos 10°=$______。

答案：$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：$[(\cos 70^\circ+\cos 50^\circ)-\cos 10^\circ]-\frac{\sqrt{3}}{2}=2\cos 60^\circ\cos 10^\circ-\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

18、$\frac{\sin 115^\circ\cdot\sin 25^\circ}{\sin 100^\circ+\sin 20^\circ}$之值爲______。

答案：$\frac{1}{2\sqrt{3}}$

解析：$\frac{\sin 115^\circ\cdot\sin 25^\circ}{\sin 100^\circ+\sin 20^\circ}=\frac{\frac{1}{-2}(\cos 140^\circ-\cos 90^\circ)}{2\sin 60^\circ\cos 40^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\cos 40^\circ}{\sqrt{3}\cos 40^\circ}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

19、$\cos^2 24^\circ+\cos^2 36^\circ+\sin^2 6^\circ$之值爲____________

答案：$\cos^2 24^\circ+\cos^2 36^\circ+\sin^2 6^\circ=\frac{1+\cos 48^\circ}{2}+\frac{1+\cos 72^\circ}{2}+\frac{1-\cos 12^\circ}{2}$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 48^\circ+\cos 72^\circ-\cos 12^\circ)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(2\cos 60^\circ\cos 12^\circ-\cos 12^\circ)=\frac{3}{2}$

20、(1) $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}$之值爲________；(2) $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}$之值爲__________

答案：(1)

$\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}$

$=\cos\frac{\pi}{7}\cdot(-\cos\frac{4\pi}{7})\cdot(-\cos\frac{2\pi}{7})=\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}$

$=\frac{8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}$

(2) $p=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}$

$2\sin\frac{\pi}{7}\cdot p=2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7})$

$2\sin\frac{\pi}{7}\cdot p=(\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{0\pi}{7})+(\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7})+(\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7})$

$2\sin\frac{\pi}{7}\cdot p=\sin\frac{6\pi}{7}\Rightarrow p=\frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2}$

21、設$\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$, $0\le\alpha\le\frac{\pi}{6}$，$0\le\beta\le\frac{\pi}{6}$，則求$\cos\alpha\cos\beta$最大值________與最小值_______。

答案：$\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$, $0\le\alpha\le\frac{\pi}{6}$，$0\le\beta\le\frac{\pi}{6}$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]=\frac{1}{2}[\cos(\frac{\pi}{6})+\cos(\alpha-\beta)]$

$\because -\frac{\pi}{6}\le\alpha-\beta\le\frac{\pi}{6}\quad\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos(\alpha-\beta)\le 1$

$\therefore \cos\alpha\cos\beta$ 之最大值爲 $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}$ ，最小值爲 $\frac{\sqrt{3}}{2}$