高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：95.06.13					
範圍	3-3 倍角、半角公式	班級		姓名	
		座號			

一、單一選擇題 (每題 10 分)

1、(B) 設 $\tan\theta = t$，其中 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ，則 (A)$\sin 2\theta = \frac{2t}{1-t^2}$ (B)$\cos 2\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

(C)$\tan 2\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (D)$\cot 2\theta = \frac{1+t^2}{2t}$ (E)$\tan\theta - \cot\theta = \frac{t}{1-t}$

2、(B) 設 $\cos 2x = t$ ，則 $\sin^4 x - \cos^4 x$ 以 t 表示之，為下列那一個多項式？

(A)t (B)$-t$ (C)t^2 (D)$-t^2$ (E)$\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$

解析：$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x = -t$

3、(D) 以 $x+\sin 170°$ 除 $8x^3-6x+2$ 的餘數為 (A)1 (B)$\frac{3}{2}$ (C)$\frac{5}{2}$ (D)3 (E)$2+\sqrt{3}$

解析：餘數為$8(-\sin 170°)^3 - 6(-\sin 170°) + 2 = 2(3\sin 170° - 4\sin^3 170°) + 2$

$= 2\sin(3\times 170°) + 2 = 2\cos 60° + 2 = 3$

4、(C) 下列選項當中何者的值最大？ (A)$\sin 20°\cos 20°$ (B)$\sin 35°\cos 35°$

(C)$\sin 50°\cos 50°$ (D)$\sin 65°\cos 65°$ (E)$\sin 80°\cos 80°$

解析：(A)$\sin 20°\cos 20° = \frac{1}{2}\sin 40°$ (B)$\sin 35°\cos 35° = \frac{1}{2}\sin 70°$

(C)$\sin 50°\cos 50° = \frac{1}{2}\sin 100° = \frac{1}{2}\sin 80°$ (D)$\sin 65°\cos 65° = \frac{1}{2}\sin 130° = \frac{1}{2}\sin 50°$

(E)$\sin 80°\cos 80° = \frac{1}{2}\sin 160° = \frac{1}{2}\sin 20°$

其中$\frac{1}{2}\sin 80°$最大。

二、填充題 (每題 10 分)

5、設$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ，若$\sin\theta = \frac{5}{13}$ ，則

$\sin 2\theta =$ ________ ， $\tan 2\theta =$ ________ ， $\cos\frac{\theta}{2} =$ ________ ， $\tan\frac{\theta}{2} =$ ______ 。

答案：$-\frac{120}{169}$, $\frac{-120}{119}$, $\frac{1}{\sqrt{26}}$, 5

解析：$\because \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ， $\sin\theta = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{12}{13}$ ， $\tan\theta = -\frac{5}{12}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = -\frac{120}{169}$ ； $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{-120}{119}$

$\because \frac{\pi}{2}<\theta<\pi \Rightarrow \frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ $\therefore \cos\frac{\theta}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$, $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = 5$

6、設$5\cos\theta + \cos\frac{\theta}{2} + 2 = 0$ ，則$\cos\frac{\theta}{2} =$ ________ 或 ________ 。

答案：$\frac{1}{2}$，$-\frac{3}{5}$

解析：令$\cos\frac{\theta}{2}=t$，則$5(2t^2-1)+t+2=0$，$(2t-1)(5t+3)=0$，$\therefore\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{5}$

7、設$\cos 2\theta=\frac{1}{3}$，則$\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=$____________。

答案：$\frac{4}{3}$

解析：$\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=\frac{4\cos^3\theta-3\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{3\sin\theta-4\sin^3\theta}{\sin\theta}=4\cos^2\theta-3+3-4\sin^2\theta$

$$=4(\frac{1+\cos 2\theta}{2})-3+3-4(\frac{1-\cos 2\theta}{2})=4\cos 2\theta=\frac{4}{3}$$

8、設$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$，試化簡$\sqrt{1-\cos\theta}-\sqrt{1+\cos\theta}=$__________。(以$\frac{\theta}{2}$角之三角函數表示之)

答案：$\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}+\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$

解析：$\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$，同理$\sqrt{1+\cos\theta}=\sqrt{2}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$　　$\therefore\frac{3}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<\pi$　　$\therefore\sin\frac{\theta}{2}>0$，$\cos\frac{\theta}{2}<0$

$\therefore\sqrt{1-\cos\theta}-\sqrt{1+\cos\theta}=\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}+\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$

9、若$\cos 2\theta=\frac{3}{5}$，則$\cos^4\theta+\sin^4\theta=$______。

答案：$\frac{17}{25}$

解析：$\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-\frac{1}{2}(\sin 2\theta)^2$

$\because\cos 2\theta=\frac{3}{5}$，$\therefore\sin 2\theta=\pm\frac{4}{5}$，$\therefore\cos^4\theta+\sin^4\theta=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{25}=\frac{17}{25}$

10、計算$\tan 37.5^\circ+\cot 37.5^\circ=$____________。

答案：$2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

解析：$\tan 37.5^\circ+\cot 37.5^\circ=\frac{1}{\sin 37.5^\circ\cdot\cos 37.5^\circ}=\frac{2}{\sin 75^\circ}=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

11、$\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}$之值__________。

答案：$\frac{3}{2}$

解析：原式$=\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8}$

$$=2(\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8})$$

$=2[(\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2})^2+(\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2})^2]$

$=2[(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2})^2+(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2})^2]$

$=2\cdot[(\frac{2-\sqrt{2}}{4})^2+(\frac{2+\sqrt{2}}{4})^2]=2\cdot\frac{12}{16}=\frac{3}{2}$

12、設 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $0<\theta<\pi$ ，則 $\sin 2\theta=$__________，又 $\theta=$__________。

答案： $-\frac{1}{2}$, $\frac{7\pi}{12}$

解析：$\because(\sin\theta+\cos\theta)^2=(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\Rightarrow 1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\therefore\sin 2\theta=-\frac{1}{2}$

$\because 0<2\theta<2\pi$ $\therefore 2\theta=\frac{7\pi}{6}$ 或 $\frac{11\pi}{6}$

但 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}>0$ ，故 $2\theta=\frac{7\pi}{6}$, $\theta=\frac{7\pi}{12}$ （$\theta=\frac{11\pi}{12}$ 不合）

13、 $\cos 12^\circ\cdot\cos 24^\circ\cdot\cos 48^\circ\cdot\cos 84^\circ=$__________。

答案： $\frac{1}{16}$

解析：設 $p=\cos 12^\circ\cdot\cos 24^\circ\cdot\cos 48^\circ\cdot\cos 84^\circ$

$2\sin 12^\circ p=2\sin 12^\circ\cos 12^\circ\cdot\cos 24^\circ\cdot\cos 48^\circ\cdot\cos 84^\circ$

$=\sin 24^\circ\cdot\cos 24^\circ\cdot\cos 48^\circ\cdot\cos 84^\circ$

$=\frac{1}{2}\sin 48^\circ\cdot\cos 48^\circ\cdot\cos 84^\circ$

$=\frac{1}{2^2}\sin 96^\circ\cdot\cos 84^\circ$

$=\frac{1}{2^2}\sin 84^\circ\cdot\cos 84^\circ$

$=\frac{1}{2^3}\sin 168^\circ$

$\Rightarrow p=\frac{\sin 168^\circ}{16\sin 12^\circ}=\frac{\sin 12^\circ}{16\sin 12^\circ}=\frac{1}{16}$

14、設 $\sin\theta=\frac{8}{5}\cos\frac{\theta}{2}$ ，則 $\cos\theta=$__________。

答案： -1 或 $-\frac{7}{25}$

解析： $2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{8}{5}\cos\frac{\theta}{2}\Rightarrow 2\cos\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2}-\frac{4}{5})=0$

$\therefore\cos\frac{\theta}{2}=0$ 或 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{4}{5}$

$\because\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$, $\therefore\cos\theta=-1$ 或 $-\frac{7}{25}$

15、設$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$且$\sin 2\theta=\frac{4}{5}$，則$\tan\theta=$____________。

答案：2

解析：$\because\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2},\ \therefore\frac{\pi}{2}<2\theta<\pi$ ，$\sin 2\theta=\frac{4}{5}\Rightarrow\tan 2\theta=-\frac{4}{3}$

$\because\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta},\ \therefore\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-\frac{4}{3}\Rightarrow 2\tan^2\theta-3\tan\theta-2=0$

$\Rightarrow(\tan\theta-2)(2\tan\theta+1)=0\Rightarrow\tan\theta=2$或$-\frac{1}{2}$（不合），$\therefore\tan\theta=2$

16、設$\sin 2\theta,\ \cos 2\theta$為$8x^2+4x-3=0$之二根，則$\sin^2\theta(\cos\theta-\sin\theta)^2=$___________。

答案：$\frac{9}{16}$

解析：依題意$\sin 2\theta+\cos 2\theta=-\frac{1}{2},\ \sin 2\theta\cdot\cos 2\theta=-\frac{3}{8}$

$\sin^2\theta(\cos\theta-\sin\theta)^2=\sin^2\theta(1-2\sin\theta\cos\theta)=\frac{1-\cos 2\theta}{2}\cdot(1-\sin 2\theta)$

$=\frac{1-(\sin 2\theta+\cos 2\theta)+\sin 2\theta\cdot\cos 2\theta}{2}=\frac{1-(-\frac{1}{2})-\frac{3}{8}}{2}=\frac{9}{16}$

17、設$\tan\frac{\theta}{2}=t$，試以t表$\sin\theta=$___________， $\cos\theta=$__________， $\tan\theta=$____________。

答案：$\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$；$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$；$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2t}{1-t^2}$

18、設θ在第一象限且$5\sin 2\theta+3\tan 2\theta=8$，則$\tan\theta=$_________，又$\cos 2\theta=$_________。

答案：$\frac{1}{2},\ \frac{3}{5}$

解析：設$\tan\theta=t$，則$\sin 2\theta=\frac{2t}{1+t^2},\ \tan 2\theta=\frac{2t}{1-t^2}$

故$5(\frac{2t}{1+t^2})+3(\frac{2t}{1-t^2})=8,\ 4t^4-2t^3+8t-4=0$，$(2t-1)(t^3+2)=0$

又$t>0\quad\therefore t=\frac{1}{2},\ \cos 2\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{3}{5}$

19、試求$\sin 18^\circ$之值_______________。

答案：令$\theta=18^\circ,\ x=\sin 18^\circ=\sin\theta\quad(0<x<1)$

$5\theta=2\theta+3\theta=90^\circ\Rightarrow 2\theta=90^\circ-3\theta$

$\cos 2\theta=\sin 3\theta\Rightarrow 1-2\sin^2\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

即 $1-2x^2=3x-4x^3\Rightarrow 4x^3-2x^2-3x+1=0\Rightarrow(x-1)(4x^2+2x-1)=0$，$x=1,\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

但 $0<x<1$， $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$，即 $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$