高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：95.06.06
範圍	3-2 和角公式	班級		姓名	
		座號			

一、單一選擇題 (每題 10 分)

1、(D) $\cos(x+y)\cos(x-y)=$ (A) $\sin^2 x-\sin^2 y$ (B) $\cos^2 x-\cos^2 y$ (C) $\sin^2 x-\cos^2 y$ (D) $\cos^2 x-\sin^2 y$ (E) $\sin^2 x+\cos^2 y$

解析：$\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)(\cos x\cos y+\sin x\sin y)$
$=\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y=\cos^2 x-\sin^2 y$

2、(A) $\sin 197°\sin 347°-\cos 17°\sin 103°=$ (A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：原式
$=(-\sin 17°)(-\sin 13°)-(\cos 17°)(+\cos 13°)$
$=-[(\cos 17°)(+\cos 13°)-\sin 17°\sin 13°]$
$=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3、(D) $\cos(\theta+15°)\cos(\theta-75°)+\sin(\theta+15°)\sin(\theta-75°)=$ (A) $\cos(2\theta-60°)$ (B) $\sin(2\theta-60°)$ (C) -1 (D) 0 (E) 1

解析：$\cos[(\theta+15°)-(\theta-75°)]=\cos 90°=0$

4、(B) 設 $\sin 123°=a$, $\cos 63°=b$，則 $\sin 60°=$ (A) $ab-\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$ (B) $ab+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$ (C) $b\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-b^2}$ (D) $b\sqrt{1-a^2}-a\sqrt{1-b^2}$ (E) $a\sqrt{1-a^2}+b\sqrt{1-b^2}$

解析：$\sin 123°=\frac{a}{1}\Rightarrow\cos 123°=-\frac{\sqrt{1-a^2}}{1}$ ； $\cos 63°=\frac{b}{1}\Rightarrow\sin 63°=\frac{\sqrt{1-b^2}}{1}$
$\sin 60°=\sin(123°-63°)=\sin 123°\cos 63°-\cos 123°\sin 63°$
$=ab-(-\sqrt{1-a^2})(\sqrt{1-b^2})=ab+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$

二、填充題 (每題 10 分)

5、 設 $\tan\alpha+\tan\beta=5$ ， $\cot\alpha+\cot\beta=\frac{5}{2}$ ，則
(1) $\tan\alpha\cdot\tan\beta=$______，(2) $\tan(\alpha+\beta)=$______。

答案：(1) 2 (2) -5

解析：(1) $\cot\alpha+\cot\beta=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{5}{2}=\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{\tan\beta\tan\alpha}$ ，
又 $\tan\alpha+\tan\beta=5$ ，$\therefore\tan\alpha\cdot\tan\beta=2$
(2) $\therefore\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}=\frac{5}{1-2}=-5$

6、 $\triangle ABC$ 若 $\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos B=-\frac{5}{13}$ ，則 $\sin C=$______, $\cos C=$______。

答案：$\frac{33}{65}$, $\frac{56}{65}$

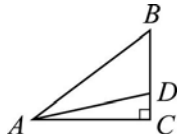
解析： $\cos B=-\frac{5}{13}\Rightarrow\sin B=\frac{12}{13}$， $\sin A=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos A=\frac{4}{5}$，

$\because\angle A+\angle B+\angle C=\pi\Rightarrow\angle C=\pi-(\angle A+\angle B)$

故 $\sin C=\sin(\pi-(A+B))=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{33}{65}$

$\cos C=\cos(\pi-(A+B))=-\cos(A+B)=-(\cos A\cos B-\sin A\sin B)=\frac{56}{65}$

7、 如圖 $\overline{AC}\perp\overline{BC}$ 於 C, $\overline{CD}=1$， $\overline{BD}=3$， $\overline{AC}=5$， $\angle BAD=\theta$，則 $\tan\theta=$______。



答案： $\frac{15}{29}$

解析：設 $\angle DAC=\alpha$ $\quad\therefore\tan\alpha=\frac{1}{5}$， $\tan(\angle BAC)=\frac{4}{5}$

$\therefore\tan\theta=\tan(\angle BAC-\alpha)=\frac{\tan(\angle BAC)-\tan\alpha}{1-\tan(\angle BAC)\tan\alpha}=\frac{15}{29}$

8、 求 $\sqrt{3}\tan17^\circ\tan77^\circ+\tan17^\circ-\tan77^\circ=$______。

答案： $-\sqrt{3}$

解析： $\because$

$\tan60^\circ=\tan(77^\circ-17^\circ)=\frac{\tan77^\circ-\tan17^\circ}{1+\tan77^\circ\tan17^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{1}\Rightarrow\tan77^\circ-\tan17^\circ=\sqrt{3}+\sqrt{3}\tan77^\circ\tan17^\circ$

$\therefore\sqrt{3}\tan77^\circ\tan17^\circ+\tan17^\circ-\tan77^\circ=-\sqrt{3}$

9、 $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$，若 $A(\sin\alpha,\cos\alpha)$, $B(\cos\beta,\sin\beta)$，則 $\overline{AB}=$______。

答案： $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

解析： $\overline{AB}=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\beta)^2+(\cos\alpha-\sin\beta)^2}$

$=\sqrt{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta}$

$=\sqrt{2-2\sin(\alpha+\beta)}=\sqrt{2-2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2})}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

10、若 $\tan\alpha=2,\tan\beta=\frac{1}{3}$，且 α,β 均為銳角，則 $\alpha-\beta=$______。

答案： $\frac{\pi}{4}$

解析： $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}}=1$，且 α,β 均為銳角， $\therefore\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$

11、$\triangle ABC$ 中 $\tan A=2$， $\tan B=3$，則 $\cos C=$______。

答案： $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析： $\because\angle A+\angle B+\angle C=\pi\Rightarrow\angle C=\pi-(\angle A+\angle B)$， $\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}=1$

$\therefore \angle C=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$

12、求$\sin 75^\circ=$______，$\cot 15^\circ=$______。

答案：$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\sqrt{3}+2$

解析：$\sin 75^\circ=\sin 105^\circ=\sin(45^\circ+60^\circ)=\sin 45^\circ\cos 60^\circ+\cos 45^\circ\sin 60^\circ$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cot 15^\circ=\cot(45^\circ-30^\circ)=\frac{\cot 45^\circ\cot 30^\circ+1}{\cot 30^\circ-\cot 45^\circ}=\frac{1\cdot\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+2$$

13、若$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$，則$(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)=$______。

答案：2

解析：$\because \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，且$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$

$$\therefore -1=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\Rightarrow \tan\alpha+\tan\beta=-1+\tan\alpha\tan\beta\Rightarrow \tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha-\tan\beta=1$$

又$(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)=1-\tan\alpha-\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta=1+1=2$

14、設$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{12}{7}$，$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，則$\cos(\alpha-\beta)=$______。

答案：$\frac{47}{49}$

解析：

$$(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2$$
$$=2+2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$
$$=2+2\cos(\alpha-\beta)$$
，
$$\Rightarrow (\frac{12}{7})^2+(\frac{4\sqrt{3}}{7})^2=2+2\cos(\alpha-\beta)$$
$$\Rightarrow \frac{192}{49}=2+2\cos(\alpha-\beta)$$
$$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\frac{47}{49}$$

15、設α，β爲同一象限角，若$\cos\alpha=\frac{11}{14}$，$\sin\beta=\frac{-3\sqrt{3}}{14}$，則$\sin(\alpha-\beta)=$______，

$\tan(\alpha+\beta)=$______。

答案：$\frac{-8\sqrt{3}}{49}$，$-\sqrt{3}$

解析：α，β同一象限且$\cos\alpha>0$，$\sin\beta<0\Rightarrow\alpha$，$\beta$爲第四象限角

$\cos\alpha=\frac{11}{14}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{-5\sqrt{3}}{14}$,，$\tan\alpha=-\frac{5\sqrt{3}}{11}$；

$\sin\beta=\dfrac{-3\sqrt{3}}{14}\Rightarrow\cos\beta=\dfrac{13}{14}\ \tan\beta=\dfrac{-3\sqrt{3}}{13}$ ，

$\therefore\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{-32\sqrt{3}}{196}=\dfrac{-8\sqrt{3}}{49}$,

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\sqrt{3}$

16、設方程式$x^2-5x-3=0$之二根爲$\tan\alpha$，$\tan\beta$ ，試求：

(1) $\tan(\alpha+\beta)=$______。(2) $\sin^2(\alpha+\beta)-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+3\cos^2(\alpha+\beta)=$______。

答案：(1) $\dfrac{5}{4}$ (2) $\dfrac{33}{41}$

解析：(1) $\tan\alpha+\tan\beta=5$，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=-3$, $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{5}{1-(-3)}=\dfrac{5}{4}$

(2) $\sin^2(\alpha+\beta)-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+3\cos^2(\alpha+\beta)$

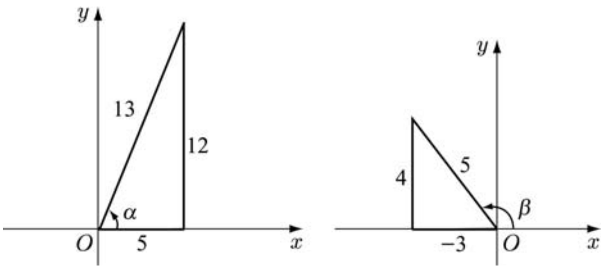
$$=\cos^2(\alpha+\beta)\left(\frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}-\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}+\frac{3\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}\right)$$

$$=\frac{1}{\sec^2(\alpha+\beta)}\left(\tan^2(\alpha+\beta)-2\tan^2(\alpha+\beta)+3\right)$$

$$=\frac{1}{\tan^2(\alpha+\beta)+1}\left(\tan^2(\alpha+\beta)-2\tan^2(\alpha+\beta)+3\right)=\frac{1}{1+(\frac{5}{4})^2}\left((\frac{5}{4})^2-2(\frac{5}{4})+3\right)=\frac{33}{41}$$

17、設$\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$ ，且α爲第一象限角；$\sec\beta=-\dfrac{5}{3}$ ，且β爲第二象限角，試求$\tan(\alpha+\beta)$之值。

答案：



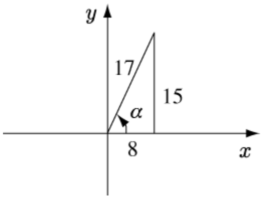
由圖得知$\tan\alpha=\dfrac{12}{5}$，$\tan\beta=\dfrac{-4}{3}$ ，故

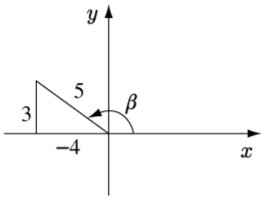
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{12}{5}+(\frac{-4}{3})}{1-\frac{12}{5}\cdot(\frac{-4}{3})}=\frac{\frac{16}{15}}{\frac{63}{15}}=\frac{16}{63}$$

18、設α爲第一象限角，β爲第二象限角，且$\cot\alpha=\dfrac{8}{15}$ ，$\sin\beta=\dfrac{3}{5}$ ，試求

$\sin(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$之值。

答案：





(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{15}{17}\times(\frac{-4}{5})+\frac{8}{17}\times\frac{3}{5}=\frac{-36}{85}$

(2) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{15}{8}+(\frac{-3}{4})}{1-\frac{15}{8}\times(\frac{-3}{4})}=\frac{9}{8}\times\frac{32}{77}=\frac{36}{77}$

(3) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{8}{17}\times(-\frac{4}{5})+\frac{15}{17}\times\frac{3}{5}=\frac{13}{85}$