高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：95.05.30					
範圍	3-1 三角函數圖形	班級		姓名	
		座號			

一、單一選擇題 (每題 10 分)

1、(D) 下列敘述何者正確？

(A)所有三角函數的週期皆爲 2π

(B)正弦函數在 0 與 π 之間是嚴格遞增函數

(C)正弦、餘弦函數的值域都是[0, 1]

(D)$y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$爲 $y=\sin x$ 的圖形向右移$\frac{\pi}{4}$

(E)正切函數的定義域爲$\mathbb{R}$

解析：(A)$\sin x,\cos x,\sec x,\csc x$ 之週期爲2π ， $\tan x,\cot x$ 之週期爲π

(B)正弦函數$\sin x$ 在 0 與$\frac{\pi}{2}$之間是嚴格遞增函數由 0 增至 1，在$\frac{\pi}{2}$與π之間是嚴格遞減函數由 1 降至 0。

(C)正弦、餘弦函數的值域都是$[-1, 1]$。

(D)正切函數 $y=\tan x$ 的定義域爲$\mathbb{R}$ ，但$x\neq n\pi\pm\frac{\pi}{2}, n\in Z$

2、(C) 請由下列各三角函數中，選出週期最小者

(A) $\cos 3x$ (B) $2\cos x$ (C) $|\cos 2x|$ (D) $|\tan x|$ (E) $2\tan x$

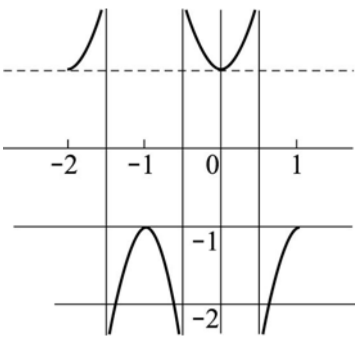
解析： $\cos 3x$ 之週期爲$\frac{2\pi}{3}$ ， $2\cos x$ 之週期爲2π ， $|\cos 2x|$之週期爲$\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$ ，

$|\tan x|$之週期爲π ， $2\tan x$之週期爲π 。

3、(A) 方程式$\sec\pi x=-2$，在$-2\le x\le 1$的範圍內有 k 個解，則$k=$

(A)3 (B)4 (C)5 (D)6 (E)7

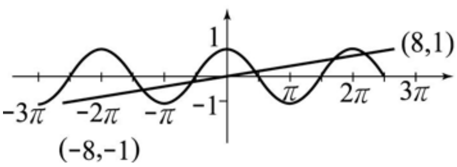
解析：



$\begin{cases} y=\sec\pi x \\ y=-2 \end{cases}$, $-2\le x\le 1$ ，有 3 個解

4、(C) 方程式$8\cos x=x$有 k 個相異實根，則$k=$ (A)3 (B)4 (C)5 (D)6 (E)7

解析：



$\begin{cases} y=\cos x \\ y=\dfrac{x}{8} \end{cases}$　　$\therefore$ 5 個相異實根

5、(A)　設 $a=\sin 2$, $b=\sin 4$, $c=\sin 5$，則 (A) $a>b>c$　(B) $a>c>b$　(C) $b>c>a$　(D) $b>a>c$　(E) $c>a>b$

解析：$\sin 2 \fallingdotseq \sin 114.6° = \sin 65.4° > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 4 \fallingdotseq \sin 229.2° = -\sin 49.2°$

$\sin 5 \fallingdotseq \sin 286.5° = -\sin 73.5°$

$\therefore a>b>c$

二、填充題 (每題 10 分)

6、　一扇形之周長為 12，中心角為 θ 時，有最大面積為 M，則 $(\theta, M)=$ ________。

答案：(2, 9)

解析：依題意 $2r+r\theta=12$

$\because \dfrac{2r+r\theta}{2} \ge \sqrt{2r\cdot r\theta} \Rightarrow 36 \ge 2r^2\theta,\ \therefore r^2\theta \le 18 \Rightarrow \dfrac{1}{2}r^2\theta \le 9$

故扇形面積 $\dfrac{1}{2}r^2\theta$ 的最大值為 9，且“=”成立於 $2r=r\theta$ 即 $\theta=2$

7、　設一扇形的周長等於其面積的 2 倍，已知扇形的半徑為 3，則此扇形之圓心角為 ______________，又面積為_____________。

答案：1，$\dfrac{9}{2}$

解析：設圓心角 θ，半徑為 3　，$3+3+3\theta=2\times(\dfrac{1}{2}\times 3^2\times\theta) \Rightarrow \theta=1$，故面積為 $\dfrac{1}{2}\times 3^2\times 1=\dfrac{9}{2}$

8、　寫出下列函數的週期：

(1) $f(x)=\sec(\dfrac{x}{3}-\pi)$ 則其週期為___________。

(2) $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 則其週期為_________________。

答案：(1) 6π　(2) $\dfrac{\pi}{2}$

解析：(1)週期為 $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$　　(2)週期為 $\dfrac{\pi}{2}$

9、　將下列各弧度表示的各角以度數表之：

(1) $\dfrac{7}{10}\pi=$ _______。　(2) $3=$ ______。

答案：(1) $126°$　(2) $(\dfrac{540}{\pi})°$

解析：(1) $\dfrac{7}{10}\pi=\dfrac{7}{10}\times 180°=126°$　　(2) $3=3\times(\dfrac{180}{\pi})°=(\dfrac{540}{\pi})°$

10、試求下列各角的弧度數：

(1) $144°=$ _________；(2) $67°30'=$ _________。

答案：(1) $\frac{4\pi}{5}$；(2) $\frac{3}{8}\pi$

解析：(1) $144^\circ = 144^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{4\pi}{5}$（弧度）　(2) $67^\circ 30' = 67.5^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{8}$（弧度）

11、時鐘在10點10分時，兩針所夾銳角爲__________弧度。

答案：$\frac{23}{36}\pi$

解析：$(10+10)\times\frac{2\pi}{60}-\frac{10}{60}\times\frac{2\pi}{12}=\frac{23}{36}\pi$

12、$-\frac{27}{5}\pi$ 的最大負同界角爲__________，最小正同界角爲__________。

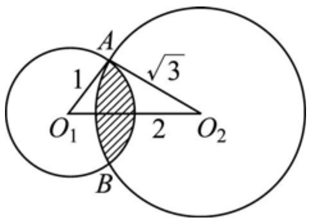
答案：$-\frac{7\pi}{5}$ ，$\frac{3\pi}{5}$

解析：$-\frac{27}{5}\pi=(-6\pi)+\frac{3}{5}\pi=(-4\pi)+(-\frac{7}{5}\pi)$

13、設圓 O_1 半徑爲 1，圓 O_2 半徑爲 $\sqrt{3}$，連心線 $\overline{O_1O_2}$ 長爲 2，則兩圓重疊區域的面積爲__________，又兩圓重疊區域之周長爲__________。

答案：$\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$，$(\frac{\sqrt{3}+2}{3})\pi$

解析：



設兩圓相交於 A, B 兩點，$\because \overline{O_1A}=1$，$\overline{O_2A}=\sqrt{3}$，$\overline{O_1O_2}=2$，

$\therefore \angle O_2O_1A=60^\circ$，$\angle O_1O_2A=30^\circ$，$\angle AO_1B=120^\circ$，$\angle AO_2B=60^\circ$

故重疊區域面積 $=\frac{60}{360}\times\pi\times(\sqrt{3})^2+\frac{120}{360}\times\pi\times1^2-2(\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3})=\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

重疊區域周長 $=\frac{60}{360}\times2\pi\times(\sqrt{3})+\frac{120}{360}\times2\times\pi\times1=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{2\pi}{3}=(\frac{\sqrt{3}+2}{3})\pi$

14、有一扇形半徑爲 10，中心角 $\theta=\frac{4}{5}\pi$，若將此扇形粘成一個直圓錐，則此直圓錐的高爲__________，又體積爲__________。

答案：$2\sqrt{21}$，$\frac{32\sqrt{21}}{3}\pi$

解析：$\because$扇形弧長 $10\times\frac{4}{5}\pi=8\pi$　$\therefore$直圓錐底部半徑爲 4

又扇形半徑爲 10（即斜高）　$\therefore$直圓錐之高爲 $\sqrt{10^2-4^2}=2\sqrt{21}$

故直圓錐的體積爲 $\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times2\sqrt{21}=\frac{32\sqrt{21}}{3}\pi$

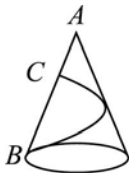
15、若 $p(\sin 40, \tan 40)$ 則 p 在第__________象限。

答案：四

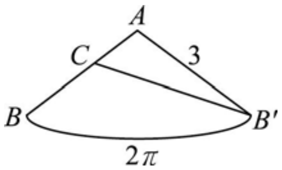
解析：40 弧度≒$57.3°\times 40 = 2292° = 132° + 360°\times 6 \Rightarrow$ 第二象限角

$\therefore \sin 40 > 0,\ \tan 40 < 0$，$p$ 在第四象限。

16、如右圖一直圓錐之底面半徑為 1，高為 $2\sqrt{2}$ ，在斜高 $\overline{AB}$ 上有一點 C，且 $\overline{AC}:\overline{BC}=1:2$ ，今由 C 點繞直圓錐乙次，拉一條彩帶到 B，則其最短距離為何？__________；又此直圓錐之側表面積為何？_________



答案：



$\because$ 底面半徑為 1，高為 $2\sqrt{2}$　$\therefore$ 斜高為 $\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$

$\therefore$ 將其展成扇形，半徑為 3，弧長 $\overset{\frown}{BB'} = 2\pi\times 1 = 2\pi$

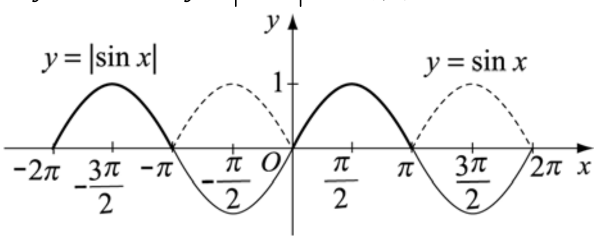
設 $\angle CAB' = \theta \Rightarrow \overset{\frown}{BB'} = 3\theta$ ，即 $2\pi = 3\theta \Rightarrow \theta = \dfrac{2\pi}{3}$

又 $\overline{AC}:\overline{BC}=1:2$，$\overline{AC}=1$，$\overline{B'C}^2 = 1^2+3^2-2\times1\times3\times\cos\dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow \overline{B'C}=\sqrt{13}$ （直線最短）

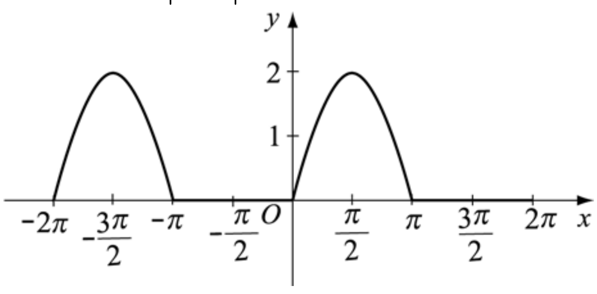
側表面積$=\dfrac{1}{2}\times 3\times 2\pi = 3\pi$

17、試求 $y=\sin x+|\sin x|$ 圖形週期_______與最大值_______、最小值________。

答案：$\because$ $y=\sin x$ 與 $y=|\sin x|$ 的圖形分別為



$\therefore$ $y=\sin x+|\sin x|$ 的圖形為



週期為 2π ，最大值為 2，最小值為 0

18、設一扇形面積為 12，周長是 14，則其半徑是多少？______________

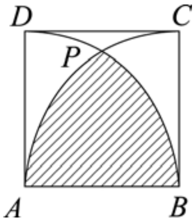
答案：設此圓半徑為 r，扇形的圓心角是 θ ，$\begin{cases} \dfrac{1}{2}r^2\theta = 12 \cdots\cdots ① \\ r\theta + 2r = 14 \ \cdots ② \end{cases}$

由② $r\theta = 14-2r$ 代入①

$\dfrac{1}{2}r(14-2r)=12 \Rightarrow r^2-7r+12=0 \Rightarrow (r-3)(r-4)=0$ ，$\therefore r=3$或4

19、如圖爲邊長爲 2 的正方形，則斜線部分的面積與周長各多少？________

$\boxed{答案}$：$\because \triangle ABP$ 爲正三角形且邊長爲 2，$\therefore \triangle ABP$ 面積爲 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}$

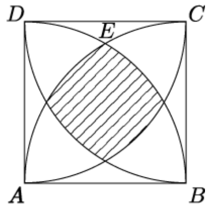


$\therefore$

$$\text{斜線面積}=\text{扇形}ABP+\text{扇形}BAP-\text{正}\triangle ABP$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}\times 2-\sqrt{3}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$$

$$\text{周長}=\overset{\frown}{AP}+\overset{\frown}{BP}+\overline{AB}=2\cdot\frac{\pi}{3}\times 2+2=\frac{4\pi}{3}+2$$

20、設正方形 $ABCD$ 之邊長爲 a。今分別以 A, B, C, D 爲圓心，以 a 爲半徑，在正方形內各作一弧，試求這四個弧所圍成的區域之面積。_________



$\boxed{答案}$：依序計算如下：

如圖(1)：

先計算 $\overset{\frown}{AE}, \overset{\frown}{BE}$ 與 $\overline{AB}$ 所圍成的「鐘形」之面積 S 鐘形面積

$S=$兩個「六分之一圓」的面積減去一個正三角形的面積

$$=2\times\frac{\pi a^2}{6}-\frac{\sqrt{3}a^2}{4}=\frac{\pi a^2}{3}-\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

如圖(2)：

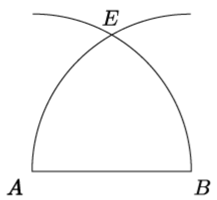
再算 $\overset{\frown}{DE}, \overset{\frown}{AE}$ 和 $\overline{AD}$ 所圍成的區域之面積 T

$T=$一個「四分之一圓」的面積減去鐘形面積 $S=\frac{\pi a^2}{4}-(\frac{\pi a^2}{3}-\frac{\sqrt{3}a^2}{4})=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}-\frac{\pi a^2}{12}$

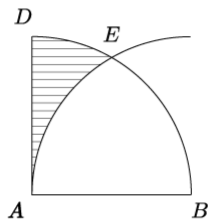
如圖(3)：

中間空白區域之面積 R 之值爲 $R=$正方形的面積減去四個 T

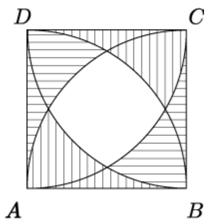
$=a^2-4(\frac{\sqrt{3}a^2}{4}-\frac{\pi a^2}{12})=(1-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3})a^2$ 此即爲所欲求之區域的面積。



圖(1)



圖(2)



圖(3)

21、扇形的周長爲 4，其半徑爲 r，中心角爲 θ 弧度，則此扇形面積的最大值是多少？___________，此時 $\theta=$__________

$\boxed{答案}$： 扇形面積最大值爲 1，此時 $\theta=2$(參閱第 6 題)

22、請寫出 $\cos x, \cot x, \sec x, \csc x$ 的週期。________；______；______；________

$\boxed{答案}$：週期分別爲 $2\pi,\ \pi,\ 2\pi,\ 2\pi$ 。