

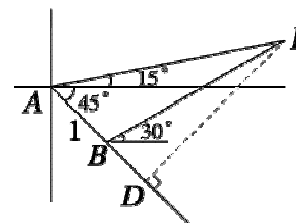
高雄市明誠中學 高一數學平時測驗				日期：95.05.10	
範圍	2-6 三角測量	班級		姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

- 1、海中有一島其四周 3 哩處佈滿水雷，有一船艦在 A 點見島在其東 15° 北，該船艦由 A 由東南方行駛 1 哩，再次測得島在其東 30° 北，若船艦方向不變繼續前進，是否安全？
答：_____。

答案：船艦是安全的

解析：∠ABI = 105°, ∠IAB = 60°, ∴ $\frac{1}{\sin 15^\circ} = \frac{\overline{AI}}{\sin 105^\circ}$ ∴ $\overline{AI} = 2 + \sqrt{3}$
∴ 設 $\overline{ID} \perp \overline{AB}$ 於 D, ∴ $\overline{ID} = \overline{AI} \cdot \sin 60^\circ = (\sqrt{3} + \frac{3}{2}) \div 2 > 3$,



∴ 船艦是安全的

- 2、一人在山麓測得山頂之仰角為 30°, 由此處上山有一直線斜坡路，與地面的斜度是 15°, 此人沿此坡走 50 公尺，又測得山頂之仰角為 60°, 則山高為_____公尺。

答案：25√2

解析：設山高為 h + 50 sin 15°

∴ $\sqrt{3}(h + 50 \sin 15^\circ) = \frac{h}{\sqrt{3}} + 50 \cos 15^\circ$, ∴ $h = \frac{25}{2}(3\sqrt{2} - \sqrt{6})$, ∴ 山高為 25√2 公尺。

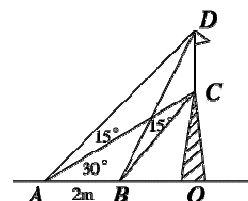
- 3、平地上有一塔，塔上豎立一旗桿。今在地面上一點 A 處，測得旗桿的張角為 15°, 塔頂之仰角為 30°, 向塔走近 2 公尺到達 B 點後，測得旗桿之張角仍為 15°, 則塔高為_____公尺，旗桿長為_____公尺。

答案：√3 + 1, 2

解析：∵ ∠DAC = ∠DBC ∴ ABCD 四點共圓

∴ ∠CDB = ∠CAB = 30°, ∴ ∠BCO = 45°, ∠ACB = 60° - 45° = 15°

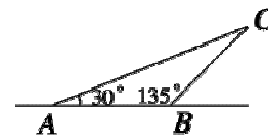
∴ $\frac{2}{\sin 15^\circ} = \frac{\overline{CD}}{\sin 15^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 30^\circ}$, $\overline{CD} = 2$, $\overline{BC} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $\overline{CD} = \sqrt{3} + 1$



- 4、運河邊有 A, B 兩點，A, B 兩點間距離為 20 公尺，運河中有船隻 C 測得 ∠CAB = 30°, ∠CBA = 135°, 則 C 與 B 之間的距離為_____公尺。

答案：10(√6 + √2)

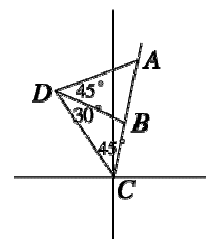
解析：∴ $\frac{\overline{BC}}{\sin 30^\circ} = \frac{20}{\sin 15^\circ}$ ∴ $\overline{BC} = 10(\sqrt{6} + \sqrt{2})$



- 5、某船位於 C 看見 A, B 二燈塔在北偏東 15° 之方向上成一直線，船向北 30° 西方向航行 2√3 哩到達 D，此時看見 A 燈塔在東 15° 北的方向上，另一燈塔 B 在東 30° 南的方向上，則 A, B 兩燈塔之距離為_____哩，又 D 與燈塔 B 之距離為_____哩。

答案：2√6 - 2√2, 6 - 2√3

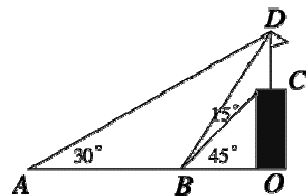
解析：∴ $\frac{\overline{DB}}{\sin 45^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 105^\circ}$ ∴ $\overline{DB} = 6 - 2\sqrt{3}$, $\frac{\overline{DB}}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}$
∴ $\overline{AB} = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$



6、屋頂上豎立一旗桿。今在地面上一點 A 處，測得旗桿頂之仰角為 30° ，向屋子走近 2 公尺到達 B 點後，測得旗桿頂之仰角為 60° ，屋頂之仰角為 45° ，試求旗桿之長。

答案： $\sqrt{3}-1$ 公尺

解析： 設旗桿長 h 公尺，屋子高 k 公尺 $\therefore \overline{OC} = \overline{BO} = k$
 $\therefore \overline{DC} = \sqrt{3}k - k = h$ ， $\sqrt{3}(\sqrt{3}k) = 2 + k$ ， $\therefore k = 1$ ，
 $\therefore h = \sqrt{3} - 1$ 公尺



7、如圖四邊形 $ABCD$ ，已知

$\angle DAC = 15^\circ$ ， $\angle CAB = 30^\circ$ ， $\angle ABD = 60^\circ$ ， $\angle DBC = 15^\circ$ 又 $\overline{AB} = 10$ ，則 $\overline{CD} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，
 $\overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案： $10(2 - \sqrt{3})$ ， 10

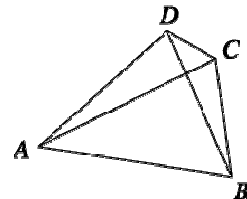
解析： $\because \angle DAC = \angle DBC = 15^\circ \therefore ABCD$ 四點共圓

過 $ABCD$ 作一圓設半徑為 R

$\angle ADB = 180^\circ - (15^\circ + 30^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$ ， $\angle ABC = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\sin 75^\circ} = \frac{\overline{CD}}{\sin 15^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 75^\circ} = 2R$$

$$\therefore \overline{AC} = \overline{AB} = 10, \overline{CD} = 10(2 - \sqrt{3})$$



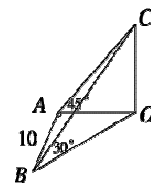
8、某人在一塔之正西 A 點，測得塔之仰角為 45° ，在 A 點之西南方 B 點，測得塔之仰角為 30° ，若 \overline{AB} 長 10 公尺，則塔高 $\underline{\hspace{2cm}}$ 公尺。

答案： $\frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{10}}{2}$

解析： 設塔高 h $\therefore \overline{AO} = h$ ， $\overline{OB} = \sqrt{3}h$ ， $\angle OAB = 135^\circ$ ， $\overline{AB} = 10$

$$\therefore (\sqrt{3}h)^2 = h^2 + 10^2 - 2 \times h \times 10 \times \cos 135^\circ$$

$$h^2 - 5\sqrt{2}h - 50 = 0 \quad \therefore h = \frac{5\sqrt{2} \pm 5\sqrt{10}}{2} \quad (\text{負不合}), \therefore h = \frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{10}}{2}$$



9、一船向正東航行，於 A 點望見 P, Q 二燈塔測其方向， P 在北 30° 東， Q 在北 75° 東，該船向前航行 15 公里後，於 B 點再測二燈塔之方向， P 在北 30° 西， Q 在北 45° 東，則燈塔 Q 與 A 的距離為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 公里，又 P, Q 兩燈塔的距離為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 公里。

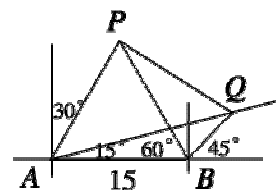
答案：

$\because \angle PAB = 60^\circ$ ， $\angle PBA = 60^\circ \therefore \triangle PAB$ 為正三角形，

$\therefore \overline{PA} = \overline{AB} = 15$ ，又 $\angle PAQ = 45^\circ$ ， $\angle ABQ = 135^\circ$ ， $\angle QAB = 15^\circ$

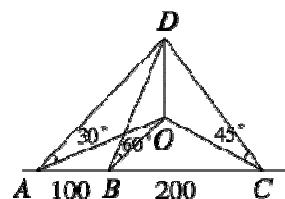
$$\therefore \frac{\overline{AQ}}{\sin 135^\circ} = \frac{15}{\sin 30^\circ} \quad \therefore \overline{AQ} = 15\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{PQ}^2 = 15^2 + (15\sqrt{2})^2 - 2 \times 15 \times 15\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 15^2, \therefore \overline{PQ} = 15$$



10、由地面上共線之三點 A, B, C ，且 B 在 A, C 之間，測得不在沿線的一座山之山頂之仰角依次為 30° ， 60° ， 45° ，若 $\overline{AB} = 100$ 公尺， $\overline{BC} = 200$ 公尺，則山高為多少公尺？

答案：



設山高 $\overline{DO} = h$ 公尺， $\therefore \overline{AO} = \sqrt{3}h$, $\overline{BO} = \frac{h}{\sqrt{3}}$, $\overline{CO} = h$

$\therefore \cos(\angle OBA) + \cos(\angle OBC) = 0$ ($\because \angle OBA + \angle OBC = 180^\circ$)

$$\therefore \frac{100^2 + (\frac{h}{\sqrt{3}})^2 - (\sqrt{3}h)^2}{2 \times 100 \times \frac{h}{\sqrt{3}}} + \frac{200^2 + (\frac{h}{\sqrt{3}})^2 - h^2}{2 \times 200 \times \frac{h}{\sqrt{3}}} = 0, h = 100 \quad \therefore \text{山高為 } 100 \text{ 公尺}$$

11、某人於山麓測得山頂的仰角 45° ，由此山麓循 15° 斜坡上行 360 公尺，再測得山頂的仰角為 60° ，則山高多少公尺？

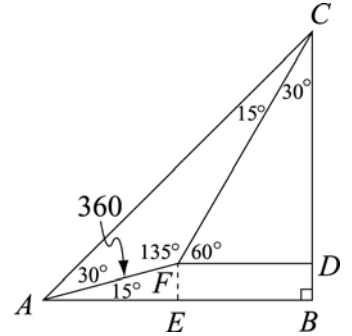
答案：令 $\overline{CD} = \sqrt{3}x$, $\therefore \overline{CF} = 2x$,

$$\therefore \frac{2x}{\sin 30^\circ} = \frac{360}{\sin 15^\circ} \Rightarrow 2x \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 360 \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 90(\sqrt{6} + \sqrt{2}), \therefore \overline{CD} = 90\sqrt{3}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

$$\overline{BD} = \overline{EF} = 360 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 90(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$\therefore \text{山高} = \overline{CD} + \overline{BD} = 270\sqrt{2} + 90\sqrt{6} + 90\sqrt{6} - 90\sqrt{2} = 180(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \text{ (公尺)}$$

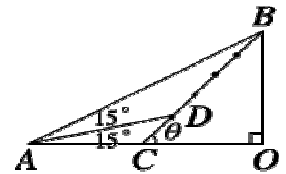


12、自一山坡頂測得平地上一點的俯角為 30° ，沿山坡走下山坡長的五分之四，再測得同一點的俯角為 15° 。試求山坡的傾斜角的正切值。

答案： $\because \angle BAD = \angle CAD = 15^\circ$, $\therefore \overline{AB} : \overline{AC} = 4 : 1$

設 $\overline{AB} = 4k$, $\overline{AC} = k$ $\because \angle BAC = 30^\circ$

$$\therefore \overline{BO} = 2k \quad \therefore \overline{CO} = (2\sqrt{3} - 1)k \quad \therefore \tan \theta = \frac{2}{2\sqrt{3} - 1} = \frac{4\sqrt{3} + 2}{11}$$

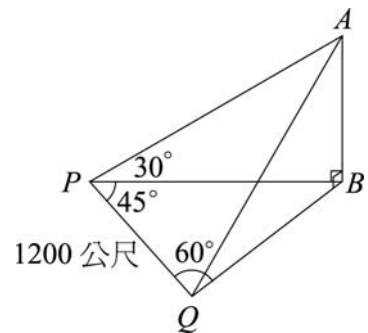


13、兩觀測站 P, Q 相距 1200 公尺，飛機 A 在地面 B 點的正上方，在 P 測得 A 的仰角為 30° ， $\angle BPQ = 45^\circ$ ，在 Q 測得 $\angle BQP = 60^\circ$ ，則飛機的高度為多少公尺？

答案：令高度 = x 公尺， $\therefore \overline{PB} = \sqrt{3}x$, $\therefore \frac{\sqrt{3}x}{\sin 60^\circ} = \frac{1200}{\sin 75^\circ}$

$$\therefore \sqrt{3}x \cdot \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) = 1200 \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore x = \frac{2400}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 600(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ (公尺)}$$

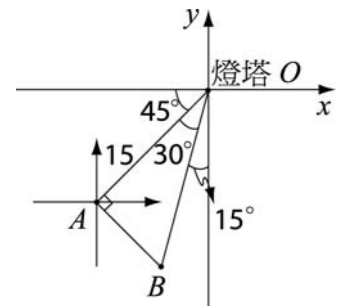


14、已知 A 船在燈塔的西南， B 船在燈塔的南 15° 西，且在 A 船的東南方，若 A 船距燈塔 15 浬，則 A, B 兩船距離多少？

答案：

$\because \angle AOB = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$ 且 $\angle OAB = 90^\circ$,

$$\therefore \overline{AB} = 15 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3} \text{ (浬)}$$



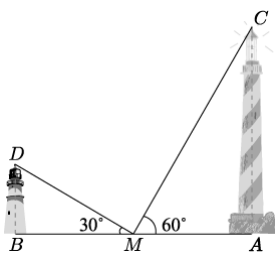
15、塔高 100 公尺，在塔的北 60° 東 A 處與南 30° 東 B 處，各測得塔的仰角分別為 75° 與 45° ，則 $\overline{AB} = ?$

答案：

塔高 $\overline{OC} = 100$, $\therefore \overline{OB} = 100$, $\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \tan 15^\circ \Rightarrow \overline{OA} = 100(2 - \sqrt{3})$

$$\overline{AB}^2 = [100(2 - \sqrt{3})]^2 + 100^2 = 100^2(8 - 4\sqrt{3})$$

$$\therefore \overline{AB} = 100\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = 100(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ (公尺)}$$

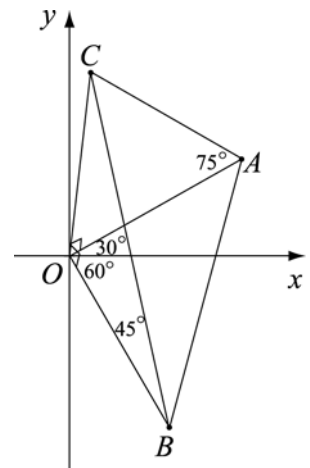


16、在 A, B 兩塔腳所連線段之中點，測得兩塔之仰角各為 60° 及 30° (見圖)，試問塔 A 之高為塔 B 之高的幾倍？

答案：由

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{BD}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3,$$

故 \overline{AC} 是 \overline{BD} 的 3 倍。



17、海中一小島，四周 3 哩處佈有水雷，今有一艦從西向東行駛，於 A 處測得該島在北 60° 東，行 5 哩後，於 B 處測得該島在北 45° 東，設若此艦航行不變，是否有危險？

答案：令最短距離 $\overline{CD} = x$, $\overline{BC} = x$, $\Rightarrow \overline{AC} = (5 + x) = \sqrt{3}x$

$$\therefore x = \frac{5}{\sqrt{3} - 1} = \frac{5(\sqrt{3} + 1)}{2} \doteq 6.8 > 3, \therefore \text{此艦沒有危險}$$

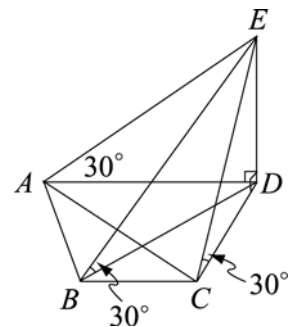
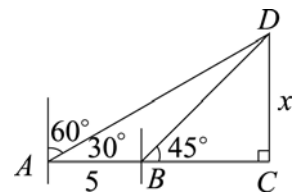
18、在平面上三點 A, B, C ，測得一山頂的仰角均為 30° ，若 $\angle BAC = 30^\circ$ 且 $\overline{BC} = 200$ 公尺，則山高是多少？

答案：

\therefore 仰角皆為 30° , $\therefore \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$, $\therefore A, B, C$ 共圓

$$\text{令 } \overline{DE} = x, \overline{AD} = \sqrt{3}x, \therefore \frac{200}{\sin 30^\circ} = 2 \cdot (\sqrt{3}x),$$

$$\therefore 200x = \sqrt{3}x, \therefore x = \frac{200}{\sqrt{3}}, \therefore \text{山高為 } \frac{200\sqrt{3}}{3} \text{ 公尺}$$



19、一船向正東航行，望見 P, Q 二燈塔，測其方向， P 在北 30° 東， Q 在北 75° 東，該船進行 15 公里，再測二燈塔之方向， P 在北 45° 西， Q 在北 60° 東，試求兩燈塔的距離。

答案：設 A 為船的最初位置， B 為向正東進行 15 公里的位置。

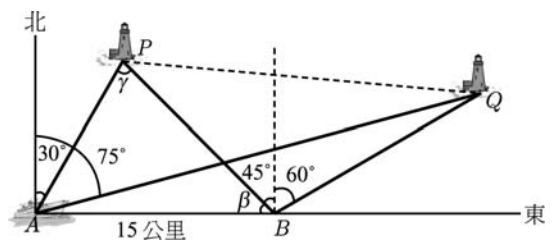
在 $\triangle ABP$ 中，

$$\frac{\overline{AP}}{\sin \beta} = \frac{\overline{AB}}{\sin \gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\sin(90^\circ - 45^\circ)} = \frac{15}{\sin[180^\circ - (60^\circ + 45^\circ)]} \Rightarrow \overline{AP} = \frac{15 \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{15 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = 15(\sqrt{3} - 1)$$

$$\text{在 } \triangle ABQ \text{ 中, } \frac{\overline{AQ}}{\sin 150^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 15^\circ} \Rightarrow \overline{AQ} = \frac{15 \sin 30^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{15 \times (\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2}$$

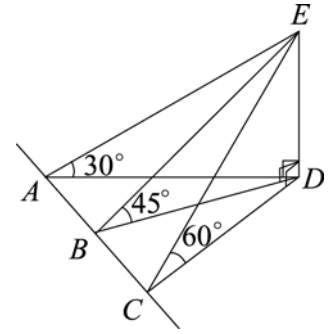
$$\text{在 } \triangle APQ \text{ 中 } \overline{PQ} = \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cos 45^\circ} = 15\sqrt{4 - \sqrt{3}} \text{ (公里)}$$



20、由一直線上相異三點 A, B, C 測得一高塔的仰角分別為 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ，若 $\overline{AB} = \overline{BC} = 600$ 公尺，則此高塔高度是多少？

答案：

令 $\overline{DE} = \sqrt{3}x$ ， $\overline{AD} = 3x$ ， $\overline{BD} = \sqrt{3}x$ ， $\overline{CD} = x$
 利用中線長定理： $\therefore (3x)^2 + x^2 = 2[(\sqrt{3}x)^2 + 600^2]$ ，
 $\therefore 4x^2 = 2 \times 600 \times 600$ ， $\therefore x = 300\sqrt{2}$ （負不合），
 \therefore 塔高 $= \sqrt{3}x = 300\sqrt{6}$ （公尺）



21、站在湖中小島的山峰上，看對岸的高峰仰角是 30° ；看湖面，這高峰的鏡影俯角是 45° ；所站的山峰高度為 250 公尺（從湖面算起），試問對岸高峰高度是多少？取兩位有效數字，設之為： $p \cdot 100 + q \cdot 10$ （公尺）， $p, q \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ 則

- (1) () (A) $p \in \{1, 3, 5, 7\}$ (B) $p \in \{2, 3, 6, 7\}$ (C) $p \in \{4, 5, 6, 7\}$ (D) $p \in \{8, 9\}$
 (E) $p \in \{0, 8\}$
 (2) () (A) $q \in \{1, 3, 5, 7\}$ (B) $q \in \{2, 6, 7\}$ (C) $q \in \{4, 5, 6, 7\}$ (D) $q \in \{8, 9\}$
 (E) $q \in \{0, 8\}$

答案： (1) (D) (2) (A)

解析： (2) 設對岸高峰高度為 h 公尺，則

$$(h - 250) \cdot \cot 30^\circ = (h + 250) \cot 45^\circ$$

$$\therefore h = 250(2 + \sqrt{3}) \approx 933, \therefore p = 9, q = 3$$

