高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：95.05.07					
範圍	2-5 正、餘弦定理	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(C) 設 a, b, c 分別表示△ABC 中，$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 之對邊邊長，設△ABC 的三個高分別記爲 h_a, h_b, h_c ，則下列選項中的條件，何者恰可決定唯一一個△ABC ？

(A) $h_a=1,\ h_b=2,\ h_c=2$ (B) $h_a=1,\ h_b=2,\ h_c=3$ (C) $h_a=2,\ h_b=3,\ h_c=4$

(D) $h_a=2,\ h_b=4,\ h_c=5$ (E) $h_a=3,\ h_b=6,\ h_c=7$

解析：$\because h_a:h_b:h_c=\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{c}$(三高比等於三邊長之反比)

$\therefore$(A) $a:b:c=2:1:1$ (兩邊之和等於第三邊)

(B) $a:b:c=6:3:2$ (兩邊之和小於第三邊)

(C) $a:b:c=6:4:3$

(D) $a:b:c=10:5:4$ (兩邊之和小於第三邊)

(E) $a:b:c=14:7:6$ (兩邊之和小於第三邊)

2、(D) 設 a, b, c 分別表示△ABC 中，$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 之對邊邊長，下列各選項中的條件何者恰可決定唯一一個△ABC？ (A) $\angle A=30°,\ \angle B=75°,\ \angle C=45°$

(B) $\angle A=45°,\ \angle B=60°,\ \angle C=75°$ (C) $\angle A=30°,\ a=4,\ c=10$

(D) $\angle A=30°,\ a=5,\ c=10$ (E) $\angle A=30°,\ a=6,\ c=10$

解析：(A)內角和非180°

(B)AAA 條件(不合)

(C) $\dfrac{4}{\sin 30°}=\dfrac{10}{\sin C}$ $\therefore \sin C=\dfrac{10}{8}>1$ (不合)

(D) $\dfrac{5}{\sin 30°}=\dfrac{10}{\sin C}$ $\therefore \sin C=1$ $\therefore \angle C=90°$ (唯一)

(E) $\dfrac{6}{\sin 30°}=\dfrac{10}{\sin C}$ $\therefore \sin C=\dfrac{10}{12}$ ，$\angle C$ 可有二解

3、(B) 設 a, b, c 分別表示△ABC 中，$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 之對邊邊長，下列各選項中的條件，何者可使△ABC 的解不唯一？ (A) $a=2,\ b=3,\ c=4$ (B) $\angle B=60°,\ b=9,\ c=10$

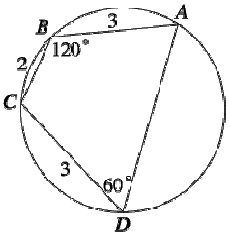
(C) $\angle B=60°,\ a=10,\ c=9$ (D) $\angle A=15°,\ \angle B=45°,\ a=10$

(E) $\angle A=15°,\ \angle B=45°,\ c=10$

解析：(A)之條件爲 SSS，(C)之條件爲 SAS，(D)之條件爲 AAS，(E)之條件爲 ASA，此四者均唯一，但(B) $\dfrac{9}{\sin 60°}=\dfrac{10}{\sin C}$ $\therefore \sin C=\dfrac{10\sqrt{3}}{18}$ $\therefore \angle C$ 有兩解

4、(D) 圓內接四邊形 $ABCD$，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\angle ABC=120°$ ，則 $\overline{AD}=$ (A)2 (B)3 (C)4 (D)5 (E)6

解析：



$\overline{AC}^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos120^\circ=19 \quad \therefore \overline{AC}=\sqrt{19}$

又 $\angle ADC=60^\circ$ (圓內接四邊形對角互補)，

設 $\overline{AD}=x$ ，$\overline{AC}^2=3^2+x^2-2\times3\cdot x\cdot\cos60^\circ=(\sqrt{19})^2$

$x^2-3x-10=0$ ，$(x-5)(x+2)=0 \quad \therefore x=5$ 或 -2 ，$\therefore \overline{AD}=5$

二、填充題 (每題 10 分)

5、 在圓內接四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{BC}=2,\ \angle BAC=45^\circ,\ \angle CAD=15^\circ$ ，則 $\overline{BD}=$______ ，又此圓半徑爲______。

答案：$\sqrt{6}$, $\sqrt{2}$

解析：$\dfrac{\overline{BC}}{\sin45^\circ}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin60^\circ}=2R \quad \therefore \overline{BD}=\sqrt{6} \quad \therefore R=\sqrt{2}$

6、 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=3,\ \overline{AC}=5,\ \overline{AB}=7$ ，則 $\angle C=$______, $\sin A=$______。

答案：120°, $\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

解析：$\cos C=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\dfrac{1}{2},\ \angle C=120^\circ$ ，$\dfrac{3}{\sin A}=\dfrac{7}{\sin C} \quad \therefore \sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

7、$\triangle ABC$ 中，a, b, c 分別表 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊長，且 $a=1+\sqrt{3}$, $b=1+\sqrt{5}$, $c=5-\sqrt{5}$ ，則 $(a+b)\cos C+(b+c)\cos A+(c+a)\cos B=$______。

答案：$7+\sqrt{3}$

解析：原式 $=(b\cos C+c\cos B)+(a\cos C+c\cos A)+(b\cos A+a\cos B)$

$=a+b+c=(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{5})+(5-\sqrt{5})=7+\sqrt{3}$

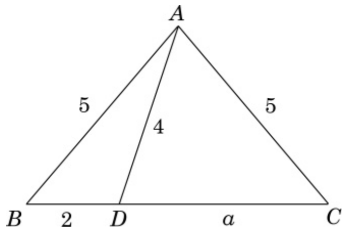
8、 在 $\triangle ABC$ 中，a, b, c 分別表 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊長，若 $(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$ ，則 $\sin A:\sin B:\sin C=$______。

答案：$7:5:3$

解析：

令 $\begin{cases} b+c=4k \\ c+a=5k \\ a+b=6k \end{cases} \Rightarrow a+b+c=15k \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{7}{2}k \\ b=\dfrac{5}{2}k \\ c=\dfrac{3}{2}k \end{cases}$ ，$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=7:5:3$

9、如圖所示 $\triangle ABC$ 中，D 爲邊 $\overline{BC}$ 上一點， 且 $\overline{AB}=\overline{AC}=5$, $\overline{AD}=4$, $\overline{BD}=2$, $\overline{DC}=a$ ，則 $a=$________。



答案：$\dfrac{9}{2}$

解析：由餘弦定律：$\cos B=\dfrac{2^2+5^2-4^2}{2\cdot2\cdot5}=\dfrac{5^2+(2+a)^2-5^2}{2\cdot5\cdot(2+a)}\Rightarrow\dfrac{13}{2}=\dfrac{a^2+4a+4}{2+a}$，$a=\dfrac{9}{2}$

10、$\triangle ABC$ 中，已知$\angle A=45°,\ \angle B=75°$，又 $\overline{BC}=2$則 $\overline{AB}=$______, $\overline{AC}=$______。

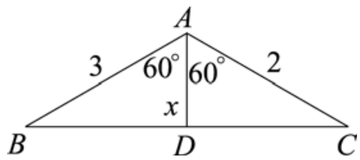
答案：$\sqrt{6}$，$\sqrt{3}+1$

解析：$\angle C=60°$　$\therefore\dfrac{\overline{AB}}{\sin60°}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin75°}=\dfrac{2}{\sin45°}$，$\overline{AB}=\sqrt{6}$，$\overline{AC}=\sqrt{3}+1$

11、$\triangle ABC$ 中，$\angle A=120°,\ \overline{AB}=3,\ \overline{AC}=2$，若$\angle A$之內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，則 $\overline{AD}=$______。

答案：$\dfrac{6}{5}$

解析：令 $\overline{AD}=x$



$\therefore\triangle ABD$面積$+\triangle ACD$面積$=\triangle ABC$面積

$\therefore\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow5x=6,\ \therefore x=\dfrac{6}{5}$

12、$\triangle ABC$ 滿足$\sin A=2\sin B\cos C$，則$\triangle ABC$ 為______三角形。

答案：等腰

解析：$\dfrac{a}{2R}=2\cdot\dfrac{b}{2R}(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab})$　$\therefore b^2=c^2$　故為等腰三角形

13、$\triangle ABC$ 中，M 為 $\overline{BC}$ 之中點，且 $\overline{BC}=6,\ \overline{AC}=3,\ \overline{AB}=5$，則 $\overline{AM}=$______，$\cos(\angle AMB)=$______。

答案：$2\sqrt{2}$，$-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

解析：$\because\overline{AM}$ 為中線，設 $\overline{AM}=x$，$(2x)^2+6^2=2(3^2+5^2)$，$x=\pm2\sqrt{2}$　(負不合)，$\overline{AM}=2\sqrt{2}$

$\cos(\angle AMB)=\dfrac{3^2+(2\sqrt{2})^2-5^2}{2\times3\times2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

14、在圓內接四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{AD}=2,\ \angle C=60°,\ \angle D=105°$，則 $\overline{BD}=$______, $\overline{AC}=$______。

答案：$2\sqrt{3}$，$\sqrt{6}+\sqrt{2}$

解析：$\overline{BD}^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos120°=12$　$\therefore\overline{BD}=2\sqrt{3}$

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin 105°}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin 120°}$ $\therefore \overline{AC}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

15、$\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=\sqrt{6},\ \overline{AC}=3+\sqrt{3},\ \angle C=45°$，則 $\overline{AB}=$______，$\angle A=$______。

答案：$2\sqrt{3}$，$30°$

解析：$c^2=(\sqrt{6})^2+(3+\sqrt{3})^2-2\times\sqrt{6}\times(3+\sqrt{3})\cos 45°$，$\therefore c=2\sqrt{3}=\overline{AB}$

$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 45°}$ $\therefore \sin A=\dfrac{1}{2}$ $\therefore \angle A=30°$或$150°$(不合)，$\therefore \angle A=30°$

16、$\triangle ABC$ 中，若 $\log_3(a+b+c)+\log_3(b+c-a)=1+\log_3 b+\log_3 c$，則 $\angle A=$______。

答案：$60°$

解析：$\log_3(a+b+c)(b+c-a)=\log_3 3\times b\times c$，$\therefore (b+c)^2-a^2=3bc$，$\therefore b^2+c^2-a^2=bc$

$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \angle A=60°$

17、$\triangle ABC$ 中，若 $a=5, b=6, c=7$，則

(1)三角形面積=______；(2)外接圓半徑=______；(3)內切圓半徑=______。

答案：(1) $6\sqrt{6}$；(2) $\dfrac{35\sqrt{6}}{24}$；(3) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

解析：(1) $S=\dfrac{a+b+c}{2}=9$，$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{9\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=6\sqrt{6}$

(2)外接圓半徑爲 R，$\triangle=\dfrac{abc}{4R}$，$\triangle=6\sqrt{6}=\dfrac{5\cdot 6\cdot 7}{4R}$，$\therefore R=\dfrac{35}{4\sqrt{6}}=\dfrac{35\sqrt{6}}{24}$

(3)內切圓半徑爲 r，$\triangle=rs$，$\triangle=6\sqrt{6}=r\cdot 9$，$\therefore r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

18、設 a, b, c 分別表示$\triangle ABC$ 中，$\angle A, \angle B, \angle C$ 之對邊邊長，在$\triangle ABC$ 中，若

$2a-6b+3c=0,\ 6a-3b-c=0$，則

$\sin A:\sin B:\sin C=$______，$\cos A:\cos B:\cos C=$______。

答案：$3:4:6$，$129:116:(-66)$

解析：$\begin{cases}2a-6b+3c=0\\6a-3b-c=0\end{cases}$ $\therefore a:b:c=3:4:6$，$\sin A:\sin B:\sin C=3:4:6$

設 $a=3k, b=4k, c=6k$

$\cos A:\cos B:\cos C$

$=\dfrac{(4k)^2+(6k)^2-(3k)^2}{2\times 4k\times 6k}:\dfrac{(3k)^2+(6k)^2-(4k)^2}{2\times 3k\times 6k}:\dfrac{(3k)^2+(4k)^2-(6k)^2}{2\times 3k\times 4k}=129:116:(-66)$

19、$\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b,\ \overline{AB}=c$，滿足 $a\cos A-b\cos B+c\cos C=0$，則$\triangle ABC$ 爲何種三角形？

答案：$a(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc})-b(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac})+c(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab})=0$

$\therefore a^4-2a^2c^2+c^4-b^4=0$ $\therefore (a^2-c^2+b^2)(a^2-c^2-b^2)=0$

$\therefore c^2=a^2+b^2$或$a^2=b^2+c^2$ $\therefore \triangle ABC$ 爲直角三角形

20、若一三角形的三邊之長爲 $x^2+3x+3,\ 2x+3,\ x^2+2x$，試求此三角形的最大角的度量。

答案：設 $a=x^2+3x+3,\ b=2x+3,\ c=x^2+2x$。由 $a, b, c>0$，必有 $x>0$

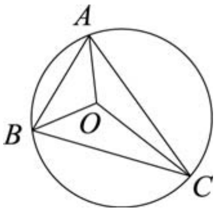
由 $a-b=x^2+x>0$ 知 $a>b$ ， $a-c=x+3>0$ 知 $a>c$ ，故 a 爲最大邊，$\angle A$ 爲最大角

由　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$=\frac{(2x+3)^2+(x^2+2x)^2-(x^2+3x+3)^2}{2(2x+3)(x^2+2x)}=\frac{-(2x+3)(x^2+2x)}{2(2x+3)(x^2+2x)}=-\frac{1}{2}$$，$\angle A=120°$。

21、 $\triangle ABC$ 外接圓半徑爲 2，且 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=3:4:5$ ，則 $\triangle ABC$ 面積是多少？

$\boxed{\text{答案}}$：



$\because \overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=3:4:5$

$\therefore \overset{\frown}{AB}=3k,\ \overset{\frown}{BC}=4k,\ \overset{\frown}{CA}=5k$ ， $3k+4k+5k=360°,\ k=30°$

$\therefore \overset{\frown}{AB}=90°,\ \overset{\frown}{BC}=120°,\ \overset{\frown}{CA}=150°$

$\therefore \triangle ABC\text{面積}=\triangle ABO+\triangle BCO+\triangle ACO$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2})+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=3+\sqrt{3}$$