高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：95.04.11					
範圍	2-1,2 銳角三角函數 2	班級		姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1、設 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{6}{5}$，則 $\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}=$ ______ 。

答案：$\frac{6}{5}$

解析：由 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ 知，

原式

$$=\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin\theta-\cos\theta}=\sin\theta+\cos\theta=\frac{6}{5}$$

2、$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°,\ \overline{BC}=10,\ \sin A=\frac{12}{13}$，則 $\overline{AC}=$ ______, $\tan A=$ ______ 。

答案：$\frac{25}{6},\ \frac{12}{5}$

解析：$\angle C=90°,\ \ \sin A=\frac{12}{13}\Rightarrow \overline{AB}=13k,\overline{BC}=12k,\overline{AC}=5k\Rightarrow\ \tan A=\frac{12}{5}$，

又 $\overline{BC}=10\Rightarrow k=\frac{5}{6}$，$\therefore\ \overline{AC}=\frac{25}{6}$

3、求各題之值

(1) $(1+\cos 60°+\cos 45°)(1-\sin 45°+\sin 30°)=$ ______ 。

(2) $\sin^2 30°+\cos^2 45°+\sin^2 60°=$ ______ 。

答案：(1) $\frac{7}{4}$ (2) $\frac{3}{2}$

解析：(1) $(1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})(1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2})=\frac{7}{4}$ (2) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$

4、設 θ 為銳角，且 $\tan\theta=\frac{3}{4}$，則 $\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$ 之值= ______ 。

答案：$\frac{7}{5}$

解析：$\because\tan\theta=\frac{3}{4},\ \therefore\sin\theta=\frac{3}{5},\ \cos\theta=\frac{4}{5}$，$\therefore$原式$=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{3}}+\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{-9}{5}+\frac{16}{5}=\frac{7}{5}$

5、設 $45°<\theta<90°$，若 $\tan\theta+\cot\theta=\frac{5}{2}$，則

(1) $\sin\theta\cdot\cos\theta=$ ______ , (2) $\sin\theta+\cos\theta=$ ______ , (3) $\sin\theta-\cos\theta=$ ______ ,

(4) $\sin\theta=$ ______ 。

答案：(1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (4) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

解析：(1) $\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$ $\therefore\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{2}{5}$

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{5}$ $\therefore\sin\theta+\cos\theta=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$ (負不合)

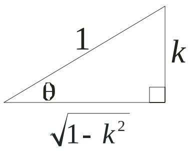
(3) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{5}$

$\because 45°<\theta<90°$ 時， $\sin\theta>\cos\theta$ ， $\sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ (負不合)

(4) 由(2)、(3)解聯立 $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

6、設 $0°<\theta<90°$ ，試以 $\sin\theta$ 表示 $\cot\theta=$______ 。

答案： $\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$



解析：設 $\sin\theta=k\Rightarrow$ $\Rightarrow\cot\theta=\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$

7、設 $\angle A$ 爲銳角，若 $\sec^2\theta=3\tan\theta-1$ ，則 $\sin A=$______ 或______ 。

答案： $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{2}{\sqrt{5}}$

解析： $\tan^2\theta+1=3\tan\theta-1$ ，設 $\tan\theta=t\Rightarrow$ $\therefore t^2+1=3t-1$ $\therefore t=1$ 或 2

$\therefore\tan\theta=1,2\Rightarrow\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{2}{\sqrt{5}}$

8、試證 $\frac{\sin\theta+2\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta}{2\sin^2\theta-1}$ 恆成立。

答案：右式 $=\frac{(\sin\theta+2\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta+2\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

9、有一梯子靠牆斜放與地面成 $60°$ 角，若梯長 6 尺，則梯腳距離牆角多遠？

答案：

$$\cos 60°=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\Rightarrow\overline{AC}=\overline{AB}\cdot\cos 60°=6\times\frac{1}{2}=3$$（公尺）

10、試證 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=2\sec\theta$ 。

答案：

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta+(1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta+1}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

$$=\frac{1+2\sin\theta+1}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

$$=\frac{2(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\cos\theta}=\frac{2}{\cos\theta}=2\sec\theta$$ (倒數關係 $\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$)

11、試化簡下列各式：

(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta+\tan^2\theta$

(2) $\frac{\sin^2\theta+\cot^2\theta-1}{\cos^2\theta}$

(3) $\frac{1+\csc^2\theta+\tan^2\theta}{\sec^2\theta}$

(4) $\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}+\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}$

(5) $(\tan\theta+\sec\theta+1)(\tan\theta-\sec\theta+1)$

答案：(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta+\tan^2\theta=1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

(2) $\frac{\sin^2\theta+\cot^2\theta-1}{\cos^2\theta}=\frac{\cot^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\csc^2\theta-\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\csc^2\theta-1=\cot^2\theta$

(3) $\frac{1+\csc^2\theta+\tan^2\theta}{\sec^2\theta}=\frac{1+\tan^2\theta}{\sec^2\theta}+\frac{\csc^2\theta}{\sec^2\theta}=\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}+\cot^2\theta=1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

(4) $\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}+\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}=\frac{(\sec\theta+\tan\theta)+(\sec\theta-\tan\theta)}{(\sec\theta-\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)}=\frac{2\sec\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}=2\sec\theta$

(5) $(\tan\theta+\sec\theta+1)(\tan\theta-\sec\theta+1)=[(\tan\theta+1)+\sec\theta][(\tan\theta+1)-\sec\theta]$

$=(\tan\theta+1)^2-\sec^2\theta=\tan^2\theta+1+2\tan\theta-\sec^2\theta=\sec^2\theta+2\tan\theta-\sec^2\theta=2\tan\theta$

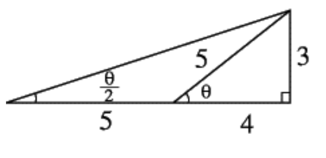
12、試證 $\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}+\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=2\csc\theta$ 。

答案：通分，原式 $=\frac{(1+\sin\theta+\cos\theta)^2+(1+\sin\theta-\cos\theta)^2}{(1+\sin\theta)^2-(\cos\theta)^2}$

$$=\frac{2[(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta]}{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\frac{2(2+2\sin\theta)}{2\sin\theta(1+\sin\theta)}=\frac{2}{\sin\theta}=2\csc\theta$$

13、已知 $\sin\theta=\frac{3}{5}$ ，試利用幾何圖形求 $\sin\frac{\theta}{2}$ 與 $\cos\frac{\theta}{2}$ 之值。

答案：



$\sqrt{9^2+3^2}=3\sqrt{10}$ ， $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

14、設方程式 $x^2-(\tan\theta+\cot\theta)x+1=0$ 有一根為 $3-2\sqrt{2}$ ，試求 $\sin\theta\cos\theta$ 的值。

答案：利用根與係數關係，二根積 1，一根 $3-2\sqrt{2}$ ，另一根為 $\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$

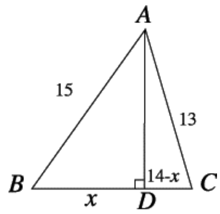
二根和 $\tan\theta+\cot\theta=(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6$ ，即 $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=6$ ，故 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{6}$

15、$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB}=15,\ \overline{AC}=13,\ \overline{BC}=14,\ \overline{AD}\perp\overline{BC}$ 於 D，則 $\overline{BD}=$？又 $\csc C=$？

答案：

設 $\overline{BD}=x,\ \overline{CD}=14-x$，$\therefore 15^2-x^2=13^2-(14-x)^2\quad \therefore x=9$，

$\therefore \overline{CD}=5,\ \overline{AD}=12\quad \therefore \csc C=\dfrac{13}{12}$



16、試證 $\sin^2\theta-\cos^2\theta=2\sin^2\theta-1$。

答案：$\sin^2\theta-\cos^2\theta=2\sin^2\theta-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2\sin^2\theta-1$