高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：95.03.17					
範圍	1-5 對數查表應用	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)　(已知：$\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$，$\log 7 = 0.8451$)

1、(C)　$\log 0.436 = -0.3605$，則 $\log 0.00436 =$

(A) -0.003605　(B) -1.3605　(C) -2.3605　(D) -2.6395　(E) -3.3605

解析：$\log 0.436 = -0.3605 = (-1) + 0.6395$，　$\therefore \log 0.00436 = (-3) + 0.6395 = -2.3605$

2、(D)　$n \in \mathbb{N}$，若 $\log n$ 的首數為 7，則此種正整數 n 共有

(A)1　(B)7　(C) 9×10^6　(D) 9×10^7　(E) 9×10^8 個

解析：$\log n$ 首數為 7　即 n 之位數為 8 位數 $10000000 \sim 99999999$ 共

$99999999 - 10000000 + 1 = 90000000 = 9\times10^7$ 個

3、(A)　設 $g_n = 400\cdot(\frac{3}{4})^n$，$n$ 是自然數，則 $g_n < 10^{-3}$ 時，n 最少是？

(A)45　(B)46　(C)47　(D)48　(E)49

解析：$400\cdot(\frac{3}{4})^n < 10^{-3} \Rightarrow \frac{1}{400}\cdot(\frac{4}{3})^n > 10^3$　$\therefore (\frac{4}{3})^n > 4\times10^5$；取 log $\Rightarrow \log(\frac{4}{3})^n > \log(4\times10^5)$，

$n(\log 4 - \log 3) > \log 4 + 5$，$n > \dfrac{2\log 2 + 5}{2\log 2 - \log 3}$

$n > \dfrac{2\times0.3010 + 5}{2\times0.3010 - 0.4771} \Rightarrow n > \dfrac{5.6020}{0.1249} = 44.8...$

二、填充題 (每題 10 分)

4、設 7^{50} 為 n 位數之整數，其個位數字為 k，最高位數字為 a，則 $a =$________，$k =$_______，$n =$_______。

答案：1, 9, 43

解析：$\log 7^{50} = 50\times0.8451 = 42.255 = 42 + 0.255$

$\because \log 1 < 0.255 < \log 2 \Rightarrow$　$7^{50} = 1.\cdots\cdots\times10^{42}$　$\therefore a = 1$，$n = 43$

$\because 7^1 \Rightarrow 7, 7^2 \Rightarrow 9, 7^3 \Rightarrow 3, 7^4 \Rightarrow 1$，$\therefore$ 7,9,3,1 為一週期，$50 \div 4 \cdots\cdots 2$　$\therefore k = 9$

5、一存款按年利率 20%複利計算，每年為一期，則至少要__________年(取整數年數)，其本利和才會超過本金的 3 倍。(已知：$\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$，$\log 7 = 0.8451$)

答案：7

解析：本金為 P，$P(1+20\%)^n > 3P$　$\therefore$

$n\log 1.2 > \log 3 \Rightarrow n > \dfrac{\log 3}{\log 1.2} = \dfrac{\log 3}{\log(\frac{2^2\times3}{10})} = \dfrac{\log 3}{2\log 2 + \log 3 - \log 10}$，

$\therefore n > 6.03... \Rightarrow n \ge 7$，至少要 7 年

6、已知 $\log 218 = 2.3385$，則 $\log 0.0218 =$__________。$\log x = -3.6615$，則 $x =$__________。

答案：-1.6615, 0.000218

解析：　$\log 218 = 2.3385 = 2 + 0.3385 \Rightarrow \log 2.18 = 0.3385$

$\therefore \log 0.0218 = -2 + \log 2.18 = -2 + 0.3385 = -1.6615$，

$\log x = -3.6615 = -4 + 0.3385 = -4 + \log 2.18$　$\therefore x = 0.000218$

7、(1)求$\log\frac{1}{250}=$＿＿＿＿＿＿。(2)若$\frac{1}{300}<(\frac{7}{8})^n<\frac{1}{250}$，則自然數 n 之值為＿＿＿＿＿＿。

答案：(1) -2.398　(2) 42

解析：(1) $\log\frac{1}{250}=\log\frac{4}{1000}=\log 4-\log 1000=2\log 2-3=-2.398$

(2)取 $\log\Rightarrow\log(\frac{1}{300})<\log(\frac{7}{8})^n<\log(\frac{1}{250})\Rightarrow\log(\frac{1}{300})<n\log(\frac{7}{8})<\log(\frac{1}{250})$

$\log(\frac{1}{300})=\log(\frac{1}{100}\div 3)=\log(\frac{1}{100})-\log 3=-2-\log 3=-2.4771$，

$\log\frac{7}{8}=\log 7-\log 8=\log 7-2\log 3=-0.0579$

$\therefore -2.4771<n\times(-0.0579)<-2.398\Rightarrow\frac{-2.4771}{-0.0579}>n>\frac{-2.398}{-0.0579}$

$\therefore 42.7>n>41.4$，$\therefore n=42$

8、設$1<x<10$且$\log 2x$的尾數為$\log x$之尾數的 3 倍，則$x=$＿＿＿＿＿＿。(二解)

答案：$\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{20}$

解析：$\because 1<x<10$　$\therefore 0<\log x<1\Rightarrow 0<2\log x<2$

$\log 2x$ 的尾數為 $\log x$ 之尾數的 3 倍

$\log 2x-3\log x\in\mathbb{Z},\ \log x+\log 2-3\log x=\log 2-2\log x\in\mathbb{Z}$

又 $0>-2\log x>-2\Rightarrow -2<-2\log x<0\Rightarrow\log 2-2<\log 2-2\log x<\log 2$

$-1.6990<\log 2-2\log x<0.3010$，$\therefore\log 2-2\log x=-1$，或 $\log 2-2\log x=0$

故　$\log\frac{2}{x^2}=-1\Rightarrow\frac{2}{x^2}=\frac{1}{10},x^2=20$　或　$\log\frac{2}{x^2}=0\Rightarrow\frac{2}{x^2}=1,x^2=2$

$\therefore x=\sqrt{20}$ 或 $\sqrt{2}$

9、$\log x^2$ 之尾數與 $\log\frac{1}{x}$ 之尾數和為 $\frac{5}{4}$，則 $\log x$ 之尾數為＿＿＿＿＿＿。

答案：$\frac{1}{4}$

解析：設 $\log x=n+\alpha$　$\therefore\log\frac{1}{x}=-(n+\alpha)=-(n+1)+(1-\alpha)$，$\log x^2=2n+2\alpha$

	$\log\frac{1}{x}$ 尾數	$\log x^2$ 尾數	
$\alpha=0$	0	0	(不合)
$0<\alpha<\frac{1}{2}$	$1-\alpha$	2α	$1-\alpha+2\alpha=\frac{5}{4}$　$\therefore\alpha=\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}\le\alpha<1$	$1-\alpha$	$2\alpha-1$	$1-\alpha+2\alpha-1=\frac{5}{4}$　$\therefore\alpha=\frac{5}{4}$ (不合)

$\therefore\log x$ 之尾數為 $\frac{1}{4}$

10、(1) $\log 1.125=$＿＿＿。(2)設 $S=1+(1.125)+(1.125)^2+\cdots+(1.125)^{10}$，則 $\log(S+8)=$＿＿＿。

答案：(1) 0.0512　(2) 1.4662

解析：(1) $\log 1.125=\log\frac{9}{8}=2\log 3-3\log 2=0.0512$

(2) $S=\frac{(1.125)^{11}-1}{1.125-1}=8\times(1.125)^{11}-8\Rightarrow S+8=8\times(1.125)^{11}$，

$\log(S+8)=\log[8\times(1.125)^{11}]=\log 8+11\times 0.0512=1.4662$

11、已知 $\log 406=2.6085$，$\log 0.407=-0.3905$，若 $\log x=1.6093$，則 $x=$＿＿＿＿＿＿。又 $\log 40630=$＿＿＿＿＿＿。

答案：40.68, 4.6088

解析：$\log 406=2.6085=2+0.6085\quad\therefore\log 4.06=0.6085$

$\log 0.407=-0.3905=-1+0.6095$，$\log 4.07=0.6095$

x	$\log x$
4.06	0.6085
p	0.6093
4.07	0.6095

$\Rightarrow\frac{a}{0.01}=\frac{0.0008}{0.001}\Rightarrow a=0.008$

$\Rightarrow p=4.06+0.008=4.068$

$\therefore\log 4.068=0.6093\quad\therefore\log x=1.6093\Rightarrow x=40.68$

同理 $\log 4.063=0.6088\quad\therefore\log 40630=4.6088$

12、若 11^{40} 爲 42 位數，且 13^{60} 爲 67 位數，則 143^{10} 爲＿＿＿＿＿位數。

答案：22

解析：11^{40} 爲 42 位數 $\Rightarrow 41\le\log 11^{40}<42\Rightarrow 41\le 40\log 11<42$，$10.25\le 10\log 11<10.5$

同理 $66\le 60\log 13<67$，$11\le 10\log 13<11.1\overline{6}$

二式相加 $21.25\le 10(\log 11+\log 13)<21.\overline{6}$，即 $21.25\le 10\log 143<21.\overline{6}$

$21.25\le\log 143^{10}<21.\overline{6}$，$\therefore 143^{10}$ 爲 22 位數

13、若 $(\frac{5^{10}}{7^{30}})$ 以小數表示，小數點後第 m 位開始不爲 0 的數字 a，則 $m=$＿＿＿，$a=$＿＿＿。

答案：19, 4

解析：$\log(\frac{5^{10}}{7^{30}})=10\cdot\log 5-30\cdot\log 7=10\cdot(\log 10-\log 2)-30\cdot\log 7=-18.363=-19+0.637$，

$\therefore m=19$，$\log 4<0.637<\log 5\quad\therefore a=4$

14、$2^{50}+3^{25}$ 爲＿＿＿位數的正整數。

答案：16

解析：$\log 2^{50}=15.05$，$\log 3^{25}=11.9275\quad\therefore 3^{25}$ 爲 12 位數，2^{50} 爲 16 位數

$\therefore 2^{50}+3^{25}$ 亦爲 16 位數

15、欲使等比級數 $1+(\frac{5}{4})+(\frac{5}{4})^2+(\frac{5}{4})^3+\cdots+(\frac{5}{4})^n\ge 396$，則 n 的最小值是多少？＿＿＿＿＿＿

答案：$\frac{1\cdot[(\frac{5}{4})^{n+1}-1]}{\frac{5}{4}-1}\ge 396\Rightarrow(\frac{5}{4})^{n+1}\ge 100$，$\therefore(n+1)(\log 5-2\log 2)\ge 2$

$\Rightarrow n+1 \geq \dfrac{2}{\log 5 - 2\log 2} = 20.6\cdots \Rightarrow n \geq 19.\cdots$ ，$\therefore n = 20$

16、若 $\log 742 = 2.8704,\ \log 0.0741 = -1.1302$ ，則 log 74.142 之值取至小數點第四位（以下四捨五入）之近似值是多少？________

答案：$\log 742 = 2.8704 \Rightarrow \log 7.42 = 0.8704$

$\log 0.0741 = -1.1302 = -2 + 0.8698 \Rightarrow \log 7.41 = 0.8698$

x	$\log x$
7.41	0.8698
7.4142	y
7.42	0.8704

$\Rightarrow \dfrac{0.0042}{0.01} = \dfrac{a}{0.0006} \Rightarrow a = 0.000252$

$\Rightarrow y = 0.8698 + 0.000252 = 0.870052$

$\therefore \log 74.142 = 1.870052 \fallingdotseq 1.8701$

17、$1+2+2^2+\cdots+2^{100}$ 的和是幾位數？________；其首位數字是多少？________

答案：(1) $1+2+\cdots+2^{100} = \dfrac{1\cdot(2^{101}-1)}{2-1} = 2^{101}-1 \fallingdotseq 2^{101}$

$\therefore \log 2^{101} = 101\times\log 2 = 101\times 0.3010 = 30.401$ ，

$\therefore$ 首數=30，$\therefore 1+2+\cdots+2^{100}$ 的和為 31 位數

(2) $\because 2^{101}-1 = b\times 10^{30}$ ，$\therefore \log 2 < \log b = 0.401 < \log 3$ ，$\therefore 2 < b < 3$ ，$\therefore$ 首位數字=2

18、志明參加郵局零存整付之儲蓄存款，每月月初須付 10000 元，若依年利率 6%複利計算，每月為 1 期，存滿 2 年後，本利和共有多少元？________

$\log 1.005 = 0.0021$，$\log 1.06 = 0.253$，$\log 1.12 = 0.0492$，$\log 1.13 = 0.0532$

答案：$10000\times(1+\dfrac{5}{1000})^{24} + 10000\times(1+\dfrac{5}{1000})^{23} + \cdots + 10000\times(1+\dfrac{5}{1000})^{1}$

$= \dfrac{10000\times 1.005\times[(1.005)^{24}-1]}{1.005-1} = 2010000\times[(1.005)^{24}-1]$

$\log(1.005)^{24} = 24\log(1.005) = 24\times 0.0021 = 0.0504$

$\begin{pmatrix} \log 1.12 = 0.0492 \\ \log k = 0.0504 \\ \log 1.13 = 0.0532 \end{pmatrix}$ $\therefore k = 1.123$ ，$\therefore (1.005)^{24} \fallingdotseq 1.123$

$\therefore$ 總和為 $2010000\times[(1.005)^{24}-1] = 2010000\times[1.123-1]$ =247230 元

19、設 $a = \sqrt[3]{\dfrac{4.21\times 0.013}{71.9}}$ ，又知 $\log 4.21 = 0.6243$，$\log 1.3 = 0.1139$，$\log 7.19 = 0.8567$ ，則 $\log a =$ ？________；又利用下表求 $a =$ ？________

常用對數表

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	表尾差								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

答案：

$$\log a=\log\sqrt[3]{\frac{4.21\times 0.013}{71.9}}=\frac{1}{3}(\log 4.21+\log 0.013-\log 71.9)$$

$$\log a=\frac{1}{3}[0.6243+0.1139-2-1.8567]=-1.0395=-2+0.9605$$ ，$\therefore a=0.0913$

20、求 N 之值： $N=[\frac{(28.44)^2\sqrt{0.5828}}{345.6}]^{\frac{1}{3}}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 。

答案：

$$\log N=\frac{1}{3}(2\log 28.44+\frac{1}{2}\log 0.5828-\log 345.6)$$

$$=\frac{1}{3}[2(1+0.4539)+\frac{1}{2}(-1+0.7655)-(2+05386)]$$

$$=\frac{1}{3}(2.9078-0.11725-2.5386)=0.0840$$

由上表知 $N\fallingdotseq 1.2133$