高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：95.03.14					
範圍	1-3,4 對數函數&圖形	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(D) $10^{\log(\log 2+\log 3)}=$？ (A)5 (B)6 (C) $\log 5$ (D) $\log 6$ (E) $\log 2\cdot\log 3$

解析：$10^{\log_{10}(\log 6)}=\log 6$

2、(E) x,y 為異於 1 的正實數，下列何者是正確的？

(A) $\log_{10}(-x)^2=2\log_{10}(-x)$ (B) $\log_x x=0$ (C) $\log_x y=\log_y x$

(D) $\log_{10}(x+y)=\log_{10}x\cdot\log_{10}y$ (E) $\log_{\sqrt{x}}\sqrt{y}=\log_x y$

解析：(A) $\because \log_{10}(-2)^2\neq 2\log_{10}(-2)$, (B) $\log_x x=1$ (C) $\log_x y=\dfrac{1}{\log_y x}$,

(D) $\log_{10}x+\log_{10}y=\log_{10}xy$ (5) $\log_{\sqrt{x}}\sqrt{y}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\log_x y=\log_x y$

二、填充題 (每題 10 分)

3、(1) $\log_3\sqrt[4]{27}=$______。 (2) $\log_8(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}})=$______。

答案：(1) $\dfrac{3}{4}$ (2) $\dfrac{1}{3}$

解析：(1) $\log_3\sqrt[4]{27}=\log_3 3^{\frac{3}{4}}=\dfrac{3}{4}$

(2) 二重方根 $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{3}+1$，同理 $\because \sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$

$\log_8(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}})=\log_8(\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1)=\log_8 2=\dfrac{1}{3}\log_2 2=\dfrac{1}{3}$

4、解方程式(1) $\log_x 25=2$ ，則 $x=$_____。 (2) $\log_{0.25}x=-3$ ，則 $x=$_____。

答案：(1)5 (2) 64

解析：(1) $25=x^2$ $\therefore x=\pm 5$ (-5 不合)

(2) $x=(0.25)^{-3}=(\dfrac{1}{4})^{-3}=(4^{-3})^{-3}=4^6$ $\therefore x=4^3=64$

5、求下列各式的值：

(1) $(\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}}0.2)(\log_{\frac{1}{5}}2+\log_5 0.5)=$______。

(2) $2\log\dfrac{5}{3}-\log\dfrac{7}{4}+2\log 3+\dfrac{1}{2}\log 49=$______。

(3) $\log_8 10\cdot\log_{10}12\cdot\log_{12}14\cdot\log_{14}16=$______。

答案：(1) -4 ；(2) 2

解析：(1)原式 $=[\log_2 5+\log_2(0.2)^{-1}](\log_5 2^{-1}+\log_5 0.5)$

$=\log_2(5\times\dfrac{1}{0.2})\times\log_5(\dfrac{1}{2}\times 0.5)=\log_2 25\times\log_5\dfrac{1}{4}=\dfrac{2\log 5}{\log 2}\times\dfrac{-2\log 2}{\log 5}=-4$

(2)原式 $=2(\log 5-\log 3)-(\log 7-\log 4)+2\log 3+\dfrac{2}{2}\log 7$

$$= 2\log 5 + \log 4 = \log 25 + \log 4 = \log 100 = 2$$

(3) $\dfrac{\log 10}{\log 8} \times \dfrac{\log 12}{\log 10} \times \dfrac{\log 14}{\log 12} \times \dfrac{\log 16}{\log 14} = \dfrac{4\log 2}{3\log 2} = \dfrac{4}{3}$

6、(1) $3^{\log_9 4} =$______。(2) $4^{\frac{1}{2}\log_2 5} + 9^{-2\log_3 \sqrt{5}} =$______。(3) $3^{\log_9(\log 25)} \times 3^{\log_9(\log_5 10)} =$______。

$\boxed{答案}$：(1) 2　(2) $\dfrac{126}{25}$　(3) $\sqrt{2}$

$\boxed{解析}$：(1) $3^{\log_9 4} = 3^{\log_3 4^{\frac{1}{2}}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$　　(2) $4^{\frac{1}{2}\log_2 5} + 9^{-2\log_3 \sqrt{5}} = 4^{\log_4 5} + 9^{\log_9 (\sqrt{5})^{-4}} = 5 + \dfrac{1}{25} = \dfrac{126}{25}$

(3) $3^{\log_9(\log 25) + \log_9(\log_5 10)} = 3^{\log_9(\log 25 \cdot \log_5 10)} = 3^{\log_9(2\log 5 \cdot \log_5 10)} = 3^{\log_9 2} = 2^{\log_9 3} = \sqrt{2}$

7、設 $\log_3(\log_5 x) + \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(\log_2 25) = 1$，則 $x =$_____。

$\boxed{答案}$：$2\sqrt{2}$

$\boxed{解析}$：$\log_3(\log_5 x) + \log_3(\log_2 25) = 1$　$\therefore \log_3(\log_5 x \cdot \log_2 25) = \log_3 3$

$\therefore \dfrac{\log x}{\log 5} \cdot \dfrac{\log 25}{\log 2} = 3 \Rightarrow \dfrac{\log x}{\log 5} \cdot \dfrac{2\log 5}{\log 2} = 3$，$\log x = \dfrac{3}{2}\log 2$　$\therefore x = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

8、設 $a = \log_3 7$，$b = \log_3 8$，則 $\log_{28} 49 =$______(以 a, b 表示之)。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{6a}{2b+3a}$

$\boxed{解析}$：$\log_3 8 = b$　$\therefore 3\log_3 2 = b \Rightarrow \log_3 2 = \dfrac{b}{3}$

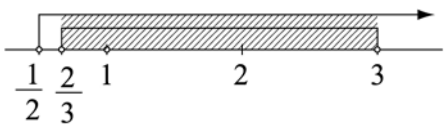
$\therefore \log_{28} 49 = \dfrac{\log_3 7^2}{\log_3(2^2 \times 7)} = \dfrac{2\log_3 7}{2\log_3 2 + \log_3 7} = \dfrac{2 \cdot a}{2 \cdot (\frac{b}{3}) + a} = \dfrac{6a}{2b+3a}$

9、$x \in \mathbb{R}$，若 $\log_{2x-1}(-3x^2 + 11x - 6)$ 恆有意義，則 x 的範圍爲________。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{2}{3} < x < 3$ 且 $x \neq 1$

$\boxed{解析}$：$\because \log_{2x-1}(-3x^2 + 11x - 6)$ 恆有意義

$$\therefore \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 2x-1 \neq 1 \\ -3x^2 + 11x - 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \cdots\cdots ① \\ x \neq 1 \cdots\cdots ② \\ \dfrac{2}{3} < x < 3 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$



由①, ② ③得 $\dfrac{2}{3} < x < 3, x \neq 1$

10、解 $x^{2\log x} = \dfrac{1000}{x}$，則 $x =$______。

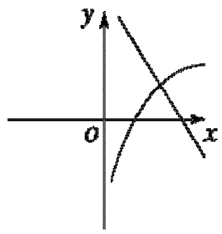
$\boxed{答案}$：10, $\dfrac{1}{10\sqrt{10}}$

$\boxed{解析}$：取 $\log \Rightarrow \log(x^{2\log x}) = \log(\dfrac{1000}{x}) \Rightarrow 2\log x \cdot \log x = \log 1000 - \log x$

令$\log x = t$　$\therefore 2t^2 = 3 - t$　$\therefore t = 1$或$-\dfrac{3}{2}$　$\therefore x = 10$或$\dfrac{1}{10\sqrt{10}}$

11、方程式$x + \log_3 x = 3$共有______個實根。

答案：1



解析：二圖形$\begin{cases} y = \log_3 x \\ y = 3 - x \end{cases}$恰有一個交點　∴共有 1 個實根

12、解$\log_3(3^x + 9) = \dfrac{x}{2} + \log_3 10$，則$x =$______或______。

答案：0, 4

解析：$\log_3(3^x + 9) = \dfrac{x}{2} + \log_3 10 \Rightarrow \log_3(3^x + 9) = \log 10^{\frac{x}{2}} + \log_3 10$

$\Rightarrow \log_3(3^x + 9) = \log(10^{\frac{x}{2}} \times 10) \Rightarrow 3^x + 9 = 3^{\frac{x}{2}} \times 10$

令$t = 3^{\frac{x}{2}}$　$\therefore t^2 - 10t + 9 = 0 \Rightarrow (t-9)(t-1) = 0$　$\therefore t = 1$或 9

$\therefore 3^{\frac{x}{2}} = 3^0$或$3^{\frac{x}{2}} = 3^2$　$\therefore \dfrac{x}{2} = 0, 2 \Rightarrow x = 0$ 或 4

13、求下列函數之反函數

(1) $f(x) = 4 - 2x,\ f^{-1}(x) =$ ________。 (2) $f(x) = x^2 + 2x + 3\ (x \ge -1),\ f^{-1}(x) =$ ________。

(3) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}\ (x \ne -1),\ f^{-1}(x) =$ ________。

答案：(1) $\dfrac{4-x}{2}$　(2) $\sqrt{x-2} - 1 (x \ge 2)$　(3) $\dfrac{1}{x} - 1\ (x \ne 0)$

解析：(1) $y = 4 - 2x\ \therefore x = \dfrac{4-y}{2}\ \therefore f^{-1}(x) = y = \dfrac{4-x}{2}$

(2) $y = x^2 + 2x + 3, y - 2 = (x+1)^2,\ x + 1 = \sqrt{y-2}\ (\because x \ge -1)$

$\therefore x = \sqrt{y-2} - 1\ \therefore f^{-1}(x) = y = \sqrt{x-2} - 1$且$x \ge 2$

(3) $y = \dfrac{1}{x+1}\ \therefore x + 1 = \dfrac{1}{y}\ \therefore x = \dfrac{1}{y} - 1\ \therefore f^{-1}(x) = y = \dfrac{1}{x} - 1\ (x \ne 0)$

14、解不等式$\log_{0.5}(x^2 + 3x) > -2$，則其解爲_______。

答案：$-4 < x < -3$或$0 < x < 1$

解析：$\log_{0.5}(x^2 + 3x) > \log_{0.5}(0.5)^{-2}\ \because 0.5 < 1$，$x^2 + 3x < (\dfrac{1}{2})^{-2}$

$\therefore \Rightarrow x^2 + 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x+4)(x-1) < 0$，$\therefore -4 < x < 1 \cdots\cdots$①

又自然限制真數$x^2 + 3x > 0$，$x(x+3) > 0$，$\therefore x > 0$或$x < -3 \cdots\cdots$②

由①②　$\therefore -4 < x < -3$或$0 < x < 1$

15、解$\log_{\frac{1}{5}} \log_3 x \ge 1$，則$x$的範圍爲______。

答案：$1 < x \le \sqrt[5]{3}$

解析：$\log_{\frac{1}{5}} \log_3 x \ge \log_{\frac{1}{5}}(\dfrac{1}{5})$

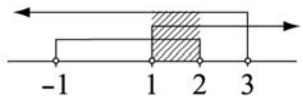
$\therefore \Rightarrow \quad \because \dfrac{1}{5}<1, \log_3 x \le \dfrac{1}{5} \Rightarrow \log_3 x \le \log_3 3^{\frac{1}{5}} \Rightarrow x \le 3^{\frac{1}{5}} \Rightarrow x \le \sqrt[5]{3} \cdots\cdots ①$

又真數$\begin{cases} x>0 \\ \log_3 x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \cdots\cdots ② \\ x>1 \cdots\cdots ③ \end{cases}$，由①②③知 $1<x\le \sqrt[5]{3}$

16、解不等式$\log_{0.5}(x-1)>\log_{0.25}(3-x)$。

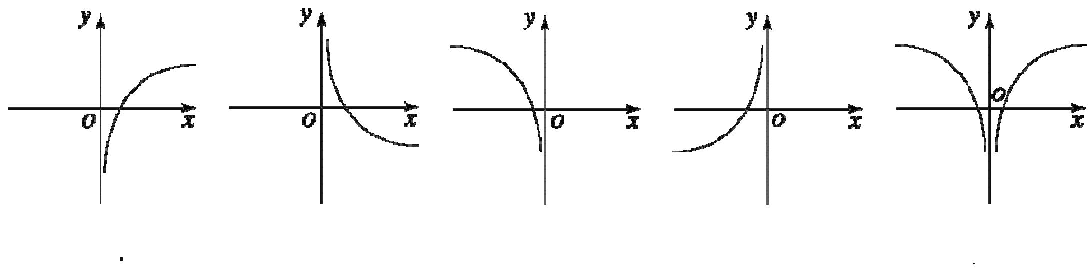
答案：$\begin{cases} x-1>0 \\ 3-x>0 \\ \log_{0.25}(x-1)^2>\log_{0.25}(3-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<3 \\ (x-1)^2<(3-x) \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x>1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x<3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ x^2-x-2<0 \Rightarrow -1<x<2 \cdots ③ \end{cases}$，

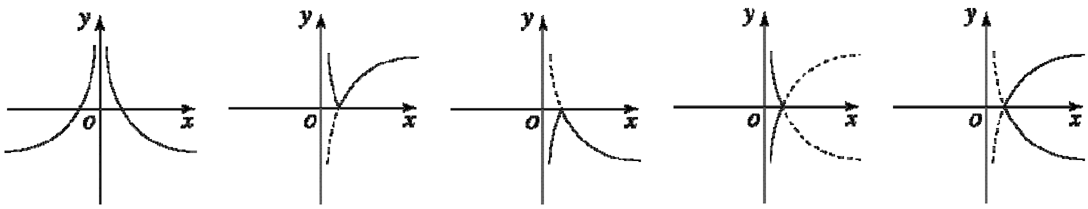


由①, ②, ③得$1<x<2$

17、



圖(一)　圖(二)　圖(三)　圖(四)　圖(五)



圖(六)　圖(七)　圖(八)　圖(九)　圖(十)

設$y=\log_a x$的圖形為圖(二)，則

(1) $y=|\log_a x|$的圖形為______。　(2) $y=\log_{\frac{1}{a}}|x|$的圖形為______。

(3) $y=\log_a(-x)$的圖形為______。　(4) $|y|=\log_a x$的圖形為______。

答案：(1) 圖(七)　(2) 圖(五)　(3) 圖(四)　(4) 圖(九)

解析：　$y=\log_a x$之圖形為圖(二)

(1) $\therefore y=|\log_a x|=\begin{cases} \log_a x\ge 0 \Rightarrow y=\log_a x \\ \log_a x<0 \Rightarrow y=-\log_a x \end{cases}$，故$y=|\log_a x|$之圖形為圖(七)

(2) $y=\log_{\frac{1}{a}}|x|=-\log_a|x|$　$\because y=\log_a|x|$之圖形為圖(六)

$\therefore y=-\log_a|x|$之圖形為圖(五)

(4) $\because |y|=\log_a x$　$\therefore \log_a x>0$ 且 $y=\pm\log_a x$，$\therefore |y|=\log_a x$之圖形為圖(九)