

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：95.03.07				
範圍	1-1,2	班級		姓名
	指數函數&圖形	座號		

一、填充題 (每題 10 分)

1、解方程式

(1)  $3^{6-x} = 243$ ，則  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(2)  $5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$ ，則  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3)  $3^{1+x} - 28 \times 3^{\frac{x}{2}-1} + 1 = 0$ ，則  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**答案**：(1)1 (2)1 (3)2 或 -4

**解析**：(1)  $3^{6-x} = 3^5 \Rightarrow 6-x=5 \quad \therefore x=1$

(2) 設  $5^x = t$ ， $t^2 - 4t - 5 = 0 \Rightarrow (t-5)(t+1) = 0$ ， $t=5$  或  $-1$ (不合)  $\therefore x=1$

(3) 設  $3^{\frac{x}{2}} = t$ ， $3t^2 - \frac{28}{3}t + 1 = 0 \Rightarrow 9t^2 - 28t + 3 = 0, (9t-1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{9}$  或  $3$

$3^{\frac{x}{2}} = 3^1, 3^{-2} \quad \therefore x = 2$  或  $-4$

2、某人存入銀行 10000 元，言明年利率 4%，以半年複利計息，滿一年本利和為  $Q$  元。則

$Q = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**答案**：10404

**解析**：複利公式：本利和 =  $P(1+r)^n$ ， $P$ : 本金， $r$ : 利率， $n$ : 期數

本利和  $Q = 10000 \times (1+2\%)^2 = 10000 \times 1.02^2 = 10000 \times 1.0404 = 10404$

3、(1) 設  $x \in \mathbb{R}$ ，令  $t = 2^x + 2^{-x}$ ，則  $t$  的範圍為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 設  $y = f(x) = (4^x + 4^{-x}) - 3(2^x + 2^{-x}) + 1$  之最小值為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

**答案**：(1)  $t \geq 2$  (2) -3

**解析**：(1)  $t = 2^x + 2^{-x}$ ， $\frac{2^x + \frac{1}{2^x}}{2} \geq \sqrt{2^x \cdot \frac{1}{2^x}} = 1 \quad \therefore t \geq 2$

(2)  $y = (t^2 - 2) - 3t + 1 = t^2 - 3t - 1 = (t - \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4}$ ，但  $t \geq 2 \quad \therefore y$  之最小值為 -3

4、解不等式

(1) 若  $(0.5)^{x^2-2x} > 0.125$ ，則其解為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(2) 若  $3^{2x+1} \leq 3^x + 2$ ，則其解為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

**答案**：(1)  $-1 < x < 3$  (2)  $x \leq 0$

**解析**：(1)  $(0.5)^{x^2-2x} > (0.5)^3 \quad \therefore 0.5 < 1 \Rightarrow x^2 - 2x < 3, (x-3)(x+1) < 0$  即  $-1 < x < 3$

(2)  $3 \cdot (3^x)^2 \leq 3^x + 2$ ，令  $t = 3^x$ ，得  $3t^2 - t - 2 \leq 0, (3t+2)(t-1) \leq 0 \quad \therefore -\frac{2}{3} \leq t \leq 1$

又  $t > 0 \Rightarrow 0 \leq t \leq 1 \quad \therefore 0 < 3^x \leq 3^0 \quad \therefore x \leq 0$

5、解不等式

(1)  $(\frac{1}{16})^x + (\frac{1}{4})^x > 6$ ，則其解為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(2)  $10^{x^2-3x} \geq 0.01$ ，則其解為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

**答案**：(1)  $x < -\frac{1}{2}$  (2)  $x \geq 2$  或  $x \leq 1$

**解析**：(1) 設  $t = \left(\frac{1}{4}\right)^x > 0$   $\therefore t^2 + t > 6 \Rightarrow (t+3)(t-2) > 0$   $\therefore t > 2$  或  $t < -3$  (不合)

$$\therefore \left(\frac{1}{4}\right)^x > 2 \Rightarrow 2^{-2x} > 2^1, \because 2 > 1 \Rightarrow -2x > 1 \quad \therefore x < -\frac{1}{2}$$

$$(2) 10^{x^2-3x} \geq 10^{-2} \quad \therefore 10 > 1 \Rightarrow x^2 - 3x \geq -2 \Rightarrow x \geq 2 \text{ 或 } x \leq 1$$

6、解方程式  $2(4^x + 4^{-x}) - (2^x + 2^{-x}) - 6 = 0$ ，則  $x =$  \_\_\_\_\_。

**答案**： $\pm 1$

**解析**：令  $t = 2^x + 2^{-x} \geq 2$   $\therefore t^2 = 4^x + 4^{-x} + 2$   $\therefore 2(t^2 - 2) - t - 6 = 0$ ， $\therefore t = \frac{5}{2}$  或  $t = -2$  (不合)

$$2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}, \text{ 設 } k = 2^x \quad \therefore k + \frac{1}{k} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0 \quad \therefore k = 2 \text{ 或 } \frac{1}{2}$$

由  $2^x = 2$ ，知  $x = 1$ ；由  $2^x = \frac{1}{2}$ ，知  $x = -1$  故  $x = \pm 1$

7、某次實驗中培養細菌數目，1 日後增加  $a$  倍且已知 3 日後細菌數為  $10^6$  個， $4\frac{1}{2}$  日後其細菌數為  $8 \times 10^6$  個，則(1)  $a =$  \_\_\_\_\_，(2) \_\_\_\_\_ 日後，可使細菌達到  $1.024 \times 10^9$  個。

**答案**：(1) 3 (2) 8

**解析**：(1) 1 日後增加  $a$  倍，即增加為  $a+1$  倍，設原細菌  $k$  個， $n$  天後細菌總數  $k \times (a+1)^n$  個

$$\therefore k \cdot (a+1)^3 = 10^6 \text{ 且 } k(a+1)^{\frac{9}{2}} = 8 \times 10^6 \quad \text{兩式相除} \quad \therefore (a+1)^{\frac{3}{2}} = 8, a+1 = 4 \Rightarrow a = 3$$

$$(2) \text{ 當 } k \times (a+1)^n = 1.024 \times 10^9 = 1024 \times k(a+1)^3, 4^n = 4^5 \times (4)^3 \quad \therefore n = 8$$

8、某放射性物質重 80 g，半衰期為  $\frac{1}{3}$  秒，問 2 秒後剩下 \_\_\_\_\_ 公克。

**答案**： $\frac{5}{4}$

**解析**： $n$  秒後半衰期共發生了  $n \div \left(\frac{1}{3}\right) = 3n$  次，放射性物質剩餘重量  $80 \left(\frac{1}{2}\right)^{3n}$  公克

$$n = 3 \Rightarrow 3n = 6 \quad \therefore 80 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{4} \text{ (g)}$$

9、設  $a^{2x} = 4$ ，則  $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} =$  \_\_\_\_\_。

**答案**： $\frac{13}{4}$

**解析**： $\frac{(a^x + a^{-x})(a^{2x} - 1 + a^{-2x})}{(a^x + a^{-x})} = 4 - 1 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$

10、設  $a^x + a^{-x} = 3$ ，則  $a^{2x} + a^{-2x} =$  \_\_\_\_\_， $a^{3x} + a^{-3x} =$  \_\_\_\_\_， $a^x - a^{-x} =$  \_\_\_\_\_， $a^x =$  \_\_\_\_\_。

**答案**：7, 18,  $\pm\sqrt{5}$ ,  $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

**解析**： $a^x + a^{-x} = 3 \dots \dots \textcircled{1}$  兩邊平方  $\Rightarrow a^{2x} + 2 + a^{-2x} = 9 \quad \therefore a^{2x} + a^{-2x} = 7$

$$a^{3x} + a^{-3x} = (a^x + a^{-x})(a^{2x} - 1 + a^{-2x}) = 3 \cdot (7 - 1) = 18$$

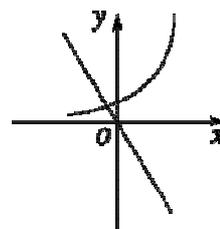
$$a^{2x} - 2 + a^{-2x} = 5 \Rightarrow (a^x - a^{-x})^2 = 5 \quad \therefore a^x - a^{-x} = \pm\sqrt{5} \dots \dots \textcircled{2} \quad \text{由} \textcircled{1} \textcircled{2} \text{ 知 } a^x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

11、求方程式  $3^x + 2x = 0$  有 \_\_\_\_\_ 個相異實根。

**答案**：1

**解析**：

$\begin{cases} y = 3^x \\ y = -2x \end{cases}$  之圖形 恰交於一點，故有 1 個相異實根。



12、某人欲購新車一部，車價為 50 萬元，領車後一個月起分 12 個月平均付款，每月利率為 0.01，請問每月應付多少元？（ $1.01^{12} = 1.1268$ ，元以下無條件進位） \_\_\_\_\_ 元

**答案**：設每月應付  $x$  元

$$x(1+0.01)^{11} + x(1+0.01)^{10} + x(1+0.01)^9 + \dots + x(1+0.01) + x = 500000 \times (1+0.01)^{12}$$

$$\frac{x[(1+0.01)^{12} - 1]}{(1+0.01) - 1} = 500000 \times (1+0.01)^{12}$$

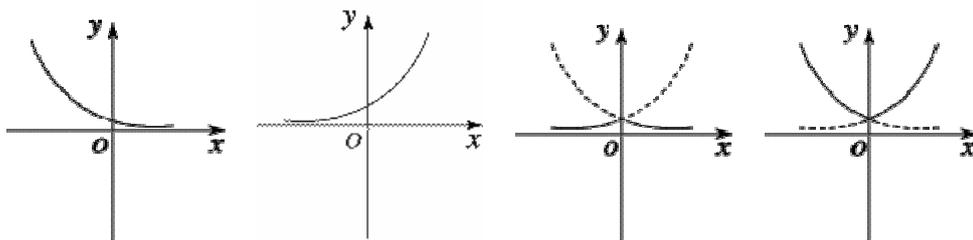
$$\text{每月應付 } x = \frac{500000 \times (1+0.01)^{12} \times 0.01}{(1+0.01)^{12} - 1} = 44432.18 \text{ 元，進位後為 } 44433 \text{ 元}$$

13、 $0 \leq x \leq 1$ ，則函數  $f(x) = 3^{x+1} - 9^x$  之最大值為何？最小值為何？

**答案**： $0 \leq x \leq 1 \quad \therefore 1 \leq 3^x \leq 3$ ，令  $t = 3^x \quad \therefore 1 \leq t \leq 3$

$$f(x) = 3^{x+1} - 9^x = 3t - t^2 = -(t - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4}, \quad \therefore f(x) \text{ 之最大值為 } \frac{9}{4}; \text{ 最小值 } 0。$$

14、

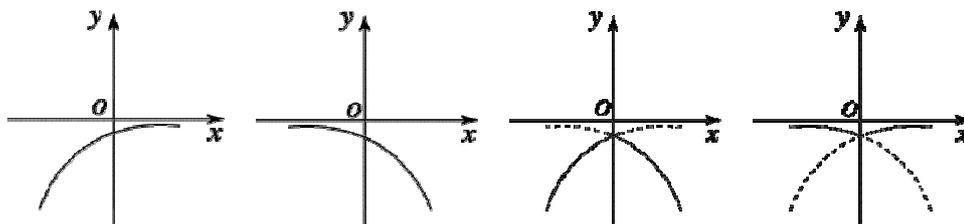


圖(一)

圖(二)

圖(三)

圖(四)



圖(五)

圖(六)

圖(七)

圖(八)

設  $y = a^x$  之圖形為圖(二)，則

(1)  $y = a^{-x}$  之圖形為 \_\_\_\_\_。(2)  $y = -a^x$  之圖形為 \_\_\_\_\_。

(3)  $y = -a^{|x|}$  之圖形為 \_\_\_\_\_。(4)  $y = (\frac{1}{a})^{|x|}$  之圖形為 \_\_\_\_\_。

**答案**：(1) 圖(一) (2) 圖(六) (3) 圖(七) (4) 圖(三)

**解析**：設  $y = a^x$  之圖形為圖(二)  $\therefore a > 1$

(1)  $y = a^{-x}$  之圖形與  $y = a^x$  之圖形對稱於  $y$  軸，故  $y = a^{-x}$  之圖形為圖(一)

(2)  $-y = a^x$  之圖形與  $y = a^x$  之圖形對稱於  $x$  軸，故  $y = -a^x$  之圖形為圖(六)

(3)  $y = -a^{|x|}$  之圖形，當  $x \geq 0$  時  $y = -a^x$ ，當  $x < 0$  時  $y = -a^{-x}$

$\therefore y = -a^{|x|}$  之圖形為圖(七)

(4)  $y = \left(\frac{1}{a}\right)^{|x|} \Rightarrow y = a^{-|x|}$  之圖形，當  $x \geq 0$  時  $y = a^{-x}$ ，當  $x < 0$  時  $y = a^x$

$\therefore y = \left(\frac{1}{a}\right)^{|x|}$  之圖形為圖(三)