高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：95.02.24					
範圍	1-1 指數函數+Ans	班級		姓名	
		座號			

一、 選擇題 (每題 10 分)

1、(B) 下列選項中的數，何者最大？ [其中 $n!=n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$]

(A)100^{10} (B)10^{100} (C)50^{50} (D)$50!$ (E)$\dfrac{100!}{50!}$

解析：(1)比較(A)(B)(C)的大小

$\because 100^{10}=(10^2)^{10}=10^{20}$

$10^{100}=10^{2\times 50}=(10^2)^{50}=100^{50}>50^{50}$ 與 10^{20}

$\therefore 10^{100}$ 最大

(2)比較(B)(D)的大小

$$\because 50!=50\times 49\times 48\times\cdots\times 2\times 1<\underbrace{100\times 100\times 100\times\cdots\times 100}_{50\text{個}}=100^{50}=10^{100}$$

(3)比較(B)(E)的大小

$$\frac{100!}{50!}=\frac{100\times 99\times\cdots\times 51\times 50!}{50!}$$

$$=100\times 99\times 98\times\cdots\times 51<\underbrace{100\times 100\times 100\times\cdots\times 100}_{50\text{個}}=10^{100}$$

由(1)(2)(3)得 10^{100} 最大。

二. 填充題 (每題 10 分)

2、設 $a>0$ ，$\dfrac{\left[a^3\cdot(a^{-2})^2\right]^4}{(a\sqrt{a})^3}=a^k$ ，則 $k=$______。

答案：$-\dfrac{17}{2}$

解析：原式 $=\dfrac{\left[a^3\cdot(a^{-4})\right]^4}{(a\cdot a^{\frac{1}{2}})^3}=\dfrac{[a^{-1}]^4}{(a^{\frac{3}{2}})^3}=3^{-4-\frac{9}{2}}=a^{-\frac{17}{2}}$ $\therefore k=-\dfrac{17}{2}$

3、設 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=2$ ，則(1) $x+x^{-1}=$______ , (2) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=$______。

答案：$6,\ 2\sqrt{2}$

解析：(1) $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=2\Rightarrow(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2=2^2\Rightarrow$ $\therefore x-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=4$ $\Rightarrow x-2+\dfrac{1}{x}=4$

$\therefore x+x^{-1}=6$

(2) $x+2+\dfrac{1}{x}=8$ $\therefore x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$ ($-2\sqrt{2}$ 不合)

4、若 $3^x=13,\ 13^y=27$ ，則 $x\cdot y=$______。

答案：3

解析：$(3^x)^y=13^y=27$ $\therefore 3^{xy}=27$ $\therefore xy=3$

5、 $x,\ y\in\mathbb{Z},\ \ 2^{x}\cdot 3^{y}=54$ ，則 $(1)\,2^{x-1}\cdot 3^{y+1}=$______ , (2) $\dfrac{2^{x+1}}{3^{y-1}}=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：(1) 81　(2) $\dfrac{4}{9}$

$\boxed{\text{解析}}$：(1)$\because x,\ y\in\mathbb{Z},\ \ 2^{x}\times 3^{y}=2^{1}\times 3^{3}$　$\therefore x=1,\ \ y=3$　　$\therefore 2^{x-1}\times 3^{y+1}=3^{4}=81$

(2) $\dfrac{2^{2}}{3^{2}}=\dfrac{4}{9}$

6、設 $x>0$ ，(1)若 $\sqrt{\dfrac{x^{5}}{x^{3}}}=x^{k}$ ，則 $k=$______ 。(2)若 $\sqrt{\dfrac{x^{5}}{x^{3}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^{2}}{x^{5}}}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{x^{3}}{x^{2}}}=x^{\ell}$ ，則 $\ell=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：(1)1　(2) $\dfrac{1}{5}$

$\boxed{\text{解析}}$：(1) $\sqrt{\dfrac{x^{5}}{x^{3}}}=\sqrt{x^{5-3}}=\sqrt{x^{2}}=x$　$\therefore k=1$

(2) $\sqrt{\dfrac{x^{5}}{x^{3}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^{2}}{x^{5}}}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{x^{3}}{x^{2}}}=\left(x^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^{-3}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(x\right)^{\frac{1}{5}}=x\cdot x^{-1}\cdot\left(x\right)^{\frac{1}{5}}=x^{1-1+\frac{1}{5}}=x^{\frac{1}{5}}$　$\therefore \ell=\dfrac{1}{5}$

7、設 $13^{x}=8,\ \ 52^{y}=16$ ，則(1) $2^{\frac{3}{x}}=$______ , (2) $\dfrac{6}{x}-\dfrac{8}{y}=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：(1) 13　(2) -4

$\boxed{\text{解析}}$：(1) $13^{x}=2^{3}$　$\therefore 13=2^{\frac{3}{x}}\Rightarrow 2^{\frac{3}{x}}=13$ …….①

(2) $52^{y}=16$　$\therefore 2^{\frac{4}{y}}=52$ …..②

①÷②　$\therefore 2^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}=\dfrac{1}{4}$　$\therefore \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=-2$　$\therefore \dfrac{6}{x}-\dfrac{8}{y}=-4$

8、化簡(1) $(\dfrac{1}{32})^{0.2}=$______ , (2) $(243)^{0.1}=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：(1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $\sqrt{3}$

$\boxed{\text{解析}}$：(1) $(\dfrac{1}{32})^{0.2}=(2^{-5})^{0.2}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$　　(2) $(243)^{0.1}=(3^{5})^{0.1}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

9、(1)化簡 $[(\dfrac{27}{64})^{-\frac{1}{4}}]^{\frac{2}{3}}=$______ 。　(2)求 $(\dfrac{8}{27})^{-\frac{1}{3}}\cdot(\dfrac{1}{16})^{\frac{1}{4}}\cdot(0.25)^{-2.5}$ 之值 =______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：(1) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　(2) 24

$\boxed{\text{解析}}$：(1) $[(\dfrac{27}{64})^{-\frac{1}{4}}]^{\frac{2}{3}}=(((\dfrac{3}{4})^{3})^{-\frac{1}{4}})^{\frac{2}{3}}=(\dfrac{3}{4})^{3\times(-\frac{1}{4})\times\frac{2}{3}}=(\dfrac{3}{4})^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(2) $(\dfrac{8}{27})^{-\frac{1}{3}}\cdot(\dfrac{1}{16})^{\frac{1}{4}}\cdot(0.25)^{-2.5}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{2}\times 32=24$

10、化簡 $(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}})(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$： $a-b$

解析：利用公式：$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 及 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

原式 $=(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=(a^{\frac{1}{3}})^3-(b^{\frac{1}{3}})^3=a-b$

11、$\sqrt[3]{5^{18}}\times\sqrt{\sqrt{5^8}}\times[(\frac{1}{25})^2\times(125)^2]^{-3}=5^k$，則 $k=$______。

答案：2

解析：原式 $=5^{\frac{18}{3}}\times(5^{\frac{8}{2}})^{\frac{1}{2}}\times[(5^{-2})^2\times(5^3)^2]^{-3}=5^6\times5^2\times(5^{-4}\times5^6)^{-3}=5^{6+2+12-18}=5^2$，$\therefore k=2$

12、設 $4^{2x}=9$，則(1) $4^x=$__________；(2) $2^{x+1}=$____________；(3) $\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^{3x}+2^{-x}}=$___________。

答案：(1) $(4^x)^2=9$　$\therefore 4^x=3$（-3 不合）

(2) $2^x=\sqrt{3}$（$-\sqrt{3}$ 不合）　$\therefore 2^{x+1}=2^x\cdot2=2\sqrt{3}$

(3) $\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^{3x}+2^{-x}}=\dfrac{2^{2x}-1}{2^{4x}+1}=\dfrac{(\sqrt{3})^2-1}{(\sqrt{3})^4+1}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$

13、在下列等式中，求 x 之值：

(1) $x^{-\frac{1}{2}}=2$，$x=$_______；(2) $x^{\frac{5}{2}}=32$，$x=$_______；(3) $(0.1)^x=100$，$x=$_______；

答案：(1) $x^{-\frac{1}{2}}=2\Rightarrow(x^{-\frac{1}{2}})^2=2^2\Rightarrow x^{-1}=4\quad\Rightarrow\frac{1}{x}=4\Rightarrow x=\frac{1}{4}$

(2) $x^{\frac{5}{2}}=32\Rightarrow(x^{\frac{5}{2}})^2=32^2\Rightarrow x^5=1024=2^{10}\quad\Rightarrow x=2^2=4$

(3) $(0.1)^x=100\Rightarrow(\frac{1}{10})^x=10^2\Rightarrow10^{-x}=10^2\quad\Rightarrow-x=2\Rightarrow x=-2$

14、設 $5^x+5^{-x}=4$，則(1) $5^{2x}+5^{-2x}=$_______；(2)又 $5^x-5^{-x}=$_______；

答案：(1) $5^x+5^{-x}=4\Rightarrow(5^x+5^{-x})^2=4^2$，$5^{2x}+2+5^{-2x}=16$　$\therefore 5^{2x}+5^{-2x}=14$

(2) $5^{2x}-2+5^{-2x}=12\Rightarrow(5^x-5^{-x})^2=12$　$\therefore 5^x-5^{-x}=\pm2\sqrt{3}$

15、若 $2^x+3^y=7$，$2^{x-1}+3^{y+1}=16$，則 $2^{x+1}+3^{y-1}=$______。

答案：$\dfrac{17}{3}$

解析：大變數法：

設 $a=2^x$，$b=3^y$，原式爲 $a+b=7$，$\frac{a}{2}+3b=16$，$b=5$，$a=2$

故 $2^{x+1}+3^{y-1}=2a+\frac{b}{3}=\frac{17}{3}$

16、設 $\sqrt[x]{16}=\sqrt[y]{2^{y+3}}$ 且 $3^{2y+6x}=27^{xy}$，求 x,y 之值。

答案：$2^{\frac{4}{x}}=2^{\frac{y+3}{y}}$ 且 $3^{2y+6x}=3^{3xy}$　$\therefore\frac{4}{x}=\frac{3}{y}+1$ 且 $\frac{2y+6x}{xy}=3\Rightarrow\frac{4}{x}-\frac{3}{y}=1,\ \frac{2}{x}+\frac{6}{y}=3$

解之 $x=2$，$y=3$

17、比較 $a=(-0.1)^3$，$b=(-0.1)^2$，$c=(-0.1)^{\frac{1}{3}}$，$d=(-0.1)^{-2}$，$e=(-0.1)^{-3}$ 的大小，則

(1)(　　) 最大的數爲 (A) a (B) b (C) c (D) d (E) e。

(2)(　　) 最小的數爲 (A) a (B) b (C) c (D) d (E) e。

答案：(1)(D)　(2)(E)

$\boxed{解析}$：(2) $0>(-0.1)^3>(-0.1)^{-3}$，又 $(-0.1)^{-2}=(-0.1)^{-2}$ ，$(-0.1)^2=(0.1)^2$ 且

$(0.1)^{-2}>(0.1)^{\frac{1}{3}}>(0.1)^2>0$，故最大為 d，最小為 e。

18、設 $x\cdot 3^x=3^{31}$，$k<x<k+1, k\in N$，則 $k=$______________。

$\boxed{答案}$：27

$\boxed{解析}$：

設 $x=3^p \Rightarrow x\cdot 3^x=3^{31}\Rightarrow 3^p\cdot 3^x=3^{31}$，且 $p+x=31$

當 $x=27.\cdots\cdots \Rightarrow x=3^{3.\cdots}$，即 $p=3.\cdots\cdots$

此時 $p+x=3.\cdots+27.\cdots=31$，取 $k=27$