高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：94.01.20					
範圍	4-6 多項不等式 +Ans	班級		姓名	
		座號			

一、 選擇題 (每題 10 分)

1、(A) 對於任意實數 x，$\dfrac{2x^2+kx+3k}{x^2+2x+3}>1$ 恆成立，則 k 之值不可以為下列何數？

(A)15 (B)12 (C)9 (D)6 (E)3

解析：$\because x^2+2x+3>0$ 恆成立 $(D=4-4\times3=-8<0)$

$\therefore 2x^2+kx+3k>x^2+2x+3$ 恆成立

$\therefore x^2+(k-2)x+(3k-3)>0$ 恆成立

$\therefore D=(k-2)^2-4\times3\times(k-1)<0\Rightarrow k^2-16k+16<0$

$8-4\sqrt{3}<k<8+4\sqrt{3}$ $\therefore k=15$ (不合)

2、(B) 設 m 為實數，若二次函數 $y=mx^2+10x+m+6$ 的圖形在直線 $y=2$ 的上方，則

(A) $m>0$ (B) $m>-2+\sqrt{29}$ (C) $0<m<-2+\sqrt{29}$ (D) $-2-\sqrt{29}<m<-2+\sqrt{29}$

(E) $m>-2+\sqrt{29}$ 或 $m<-2-\sqrt{29}$

解析：$\because mx^2+10x+m+6>2$ 恆成立 $\therefore m>0$

且 $\dfrac{D}{4}=25-m(m+4)<0$ $\therefore m^2+4m-25>0$

$\therefore m>-2+\sqrt{29}$ 或 $m<-2-\sqrt{29}\Rightarrow m>-2+\sqrt{29}$

3、(D) 解不等式 $(x^3+1)(x^3-1)(x^2-1)>0$ 則其解為 (A)所有實數 (B) $x>1$ 或 $x<-1$

(C) $-1<x<1$ (D) $x\neq1$ 且 $x\neq-1$ (E)無解

解析：$(x+1)^2(x-1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)>0$ 但 $x^2+x+1>0$ 恆成立

$x^2-x+1>0$ 恆成立 $\therefore (x+1)^2(x-1)^2>0,\ (x+1)^2>0\Rightarrow x\neq-1$

$(x-1)^2>0\Rightarrow x\neq1\Rightarrow x\neq1$ 且 $x\neq-1$

4、(B) 設 $f(x)$ 為二次函數，且 $f(x)>0$ 之解為 $-2<x<4$ 則 $f(2x)<0$ 之解為

(A) $-1<x<2$ (B) $x<-1$ 或 $x>2$ (C) $x<-2$ 或 $x>4$ (D) $-4<x<8$

(E) $x<-4$ 或 $x>8$

解析：$\because f(x)>0$ 之解為 $-2<x<4$

$\therefore$ 可令 $f(x)=-(x-4)(x+2)$

$\therefore f(2x)<0\Rightarrow -(2x-4)(2x+2)<0$

$\therefore (x+1)(x-2)>0$

$\therefore x>2$ 或 $x<-1$

5、(C) 對任意實數 x，$x+\dfrac{1}{x}$ 恆有 (A) $x+\dfrac{1}{x}\geq2$ (B) $x+\dfrac{1}{x}\leq-2$ (C) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geq2$ (D) $|x|+\dfrac{1}{|x|}\leq2$

(E) $(x+\dfrac{1}{x})^2\leq4$

解析：若 $x>0,\ x+\dfrac{1}{x}\geq2$，若 $x<0,\ x+\dfrac{1}{x}\leq-2$

$\therefore \left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geq2$ $\therefore (x+\dfrac{1}{x})^2\geq4\,|x|+\dfrac{1}{|x|}\geq2$

6、(B)　下列那一個不等式，其解集合非「無解」？ (A) $x^2+6x+10<0$　(B) $x^2+2x\le -1$
(C) $-x^2+8x>16$　(D) $-x^2+3x-5\ge 0$　(E) $-2x^2+x>5$

$\boxed{\text{解析}}$：(A) $(x+3)^2+1<0$　無解

(B) $(x+1)^2\le 0\Rightarrow x=-1$

(C) $-(x-4)^2>0$　無解

(D) $D=9-20=-11<0$　$\therefore -x^2+3x-5\ge 0$　無解

(E) $D=1-40=-39<0$　$\therefore -x^2+x>5$　無解

7、(D)　解不等式 $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\ge 0$ 之解為 (A) $x\ge 3$ 或 $2\ge x\ge 1$　(B) $x\ge 3$ 或 $x\le 1$
(C) $1\le x\le 3$　(D) $x\ge 3$ 或 $x=2$ 或 $x\le 1$　(E) $3\ge x\ge 2$ 或 $x\le 1$

$\boxed{\text{解析}}$：$(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\ge 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-3)\ge 0$ 且 $x=2$

$\Rightarrow x\ge 3$ 或 $x=2$ 或 $x\le 1$

8、(B)　設 $f(x)$ 為二次函數，且不等式 $f(x)>0$ 之解為 $-2<x<4$，則 $f(2x)<0$ 之解為何？
(A) $-1<x<2$　(B) $x<-1$ 或 $x>2$　(C) $x<-2$ 或 $x>4$　(D) $-4<x<8$　(E) $x<-4$ 或 $x>8$

$\boxed{\text{解析}}$：$\because f(x)>0$ 之解為 $-2<x<4$

$\therefore f(2x)<0$ 之解為 $2x<-2$ 或 $2x>4\Rightarrow x>2$ 或 $x<-1$

故答案為(B)。

9、(B)　設 $m\in\mathbb{R}$，若二次函數 $y=mx^2+10x+m+6$ 的圖形在直線 $y=2$ 的上方，則 m 的範圍為何？ (A) $m>0$　(B) $m>-2+\sqrt{29}$　(C) $0<m<-2+\sqrt{29}$
(D) $-2-\sqrt{29}<m<-2+\sqrt{29}$　(E) $m>-2+\sqrt{29}$ 或 $m<-2-\sqrt{29}$

$\boxed{\text{解析}}$：$\because y=mx^2+10x+(m+6)$ 的圖形恆在 $y=2$ 的上方

$\therefore mx^2+10x+(m+6)>2$

$\therefore mx^2+10x+(m+4)>0, \forall x\in\mathbb{R}$

$$\therefore \begin{cases} m>0 \\ D=10^2-4m(m+4)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>0 \\ m>-2+\sqrt{29} \text{或} m<-2-\sqrt{29} \end{cases}$$

$\therefore m>-2+\sqrt{29}$

故答案為(B)。

10、(C) 下列那一個不等式，其解集合非「任意實數」？ (A) $x^2+2x+3>0$
(B) $x^2+4x+4\ge 0$　(C) $-x^2+2x-1<0$　(D) $-x^2+5x-7\le 0$　(E) $-x^2\le 0$

$\boxed{\text{解析}}$：(A) $(x+1)^2+2>0\Rightarrow x\in\mathbb{R}$

(B) $(x+2)^2\ge 0\Rightarrow x\in\mathbb{R}$

(C) $-(x-1)^2<0\Rightarrow x\in\mathbb{R}$ 但 $x\ne 1$

(D) $-x^2+5x-7\le 0, D=25-28=-3<0\Rightarrow x\in\mathbb{R}$

(E) $-x^2\le 0\Rightarrow x\in\mathbb{R}$

二、填充題 (每題 10 分)

1、設 $x\in\mathbb{R}$，求 $f(x)=\dfrac{x^2+4x+2}{x^2+2x+2}$ 之最大值爲_______，此時 $x=$_______。

$\boxed{\text{答案}}$：$\sqrt{2},\sqrt{2}$

$\boxed{\text{解析}}$：令 $y=\dfrac{x^2+4x+2}{x^2+2x+2}$ $\quad\therefore (y-1)x^2+(2y-4)x+(2y-2)=0$

有實數解 $\therefore D=(2y-4)^2-8(y-1)^2\ge 0\Rightarrow y^2-2\le 0$

$\therefore -\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}$ $\quad\therefore$ y 有最大值 $\sqrt{2}$

$y=\sqrt{2}\Rightarrow(\sqrt{2}-1)x^2+(2\sqrt{2}-4)x+(2\sqrt{2}-2)=0$

$\therefore x^2-2\sqrt{2}x+2=0$ $\quad\therefore x=\sqrt{2}$

2、解下列不等式

(1)$(x-2)^2(x+1)>0$ (2)$(x+1)^3\le 0$ (3)$6x^3-11x^2-3x+2>0$

(4)$(x-1)^3(x+2)^4(x-3)\le 0$

$\boxed{\text{答案}}$：(1)$x>-1$ 且 $x\ne 2$

(2)$x\le -1$

(3)$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}$

(4)$x=-2$ 或 $1\le x\le 3$

$\boxed{\text{解析}}$：(1) $(x-2)^2>0\Rightarrow x\ne 2(x+1)>0$ $\quad\therefore x>-1\Rightarrow x>-1$ 且 $x\ne 2$

(2) $(x+1)^3\le 0\Rightarrow x=-1$ 且 $x+1\le 0$ $\quad\therefore x\le -1$

(3) $(x-2)(2x+1)(3x-1)>0\Rightarrow x>2$ 或 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}$

(4) $(x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=1,(x+2)^4=0$ $\quad\therefore x=-2$

$(x-1)(x-3)\le 0\Rightarrow 1\le x\le 3$ 或 $x=1,x=-2$

$\Rightarrow x=-2$ 或 $1\le x\le 3$

3、設 $f(x)=x^2+2ax+5a+3$，圖形恆與 $y=-3$ 不相交則實數 a 的範圍爲_______。

$\boxed{\text{答案}}$：$-1<a<6$

$\boxed{\text{解析}}$：$x^2+2ax+5a+3>-3$ 恆成立 $\quad\therefore\dfrac{D}{4}=a^2-(5a+6)<0$

即 $a^2-5a-6<0$,$(a-6)(a+1)<0$ $\therefore -1<a<6$

4、$\triangle ABC$ 之三邊長分別爲 $x-1,\ 2x-1,\ x+1$，則 x 的範圍爲_______。又若 $\triangle ABC$ 爲鈍角△，且最長的邊爲 $2x-1$，則 x 的範圍爲_______。

$\boxed{\text{答案}}$：$x>\dfrac{3}{2},x>\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$ 或 $x<\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}$

$\boxed{\text{解析}}$：

$$\because\begin{cases}x-1+2x-1>x+1\\ 2x-1+x+1>x-1\Rightarrow x>\dfrac{3}{2}\\ x+1+x-1>2x-1\end{cases}$$

若爲鈍角△，則 $(2x-1)^2>(x+1)^2+(x-1)^2$ $\quad\therefore 2x^2-4x-1>0$

$\therefore x > \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$ 或 $x < \dfrac{2-\sqrt{6}}{2}$(不合)($\because x > \dfrac{3}{2}$)

5、不等式 $2|x-2| > x+2$ 之解爲__________________。

$\boxed{\text{答案}}$：$x > 6$ 或 $x < \dfrac{2}{3}$

$\boxed{\text{解析}}$：(1)若 $x \geq 2$ 時，$2(x-2) > x+2 \Rightarrow x > 6$

(2)若 $x \leq 2$ 時，$2(2-x) > x+2 \Rightarrow x < \dfrac{2}{3}$

$\therefore x > 6$ 或 $x < \dfrac{2}{3}$。

6、設 k 爲一整數。若方程式 $kx^2+7x+1=0$ 有兩個相異實根，且兩根的乘積介於 $\dfrac{5}{71}$ 與 $\dfrac{6}{71}$ 之間，則 $k=$_______。

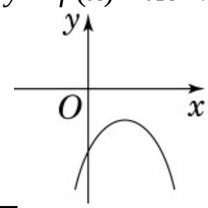
$\boxed{\text{答案}}$：12

$\boxed{\text{解析}}$：$\begin{cases} 49-4k>0 \\ \dfrac{5}{71}<\dfrac{1}{k}<\dfrac{6}{71} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k<12\dfrac{1}{4} \\ 5<\dfrac{71}{k}<6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \leq 12 \\ 5k<71<6k \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} k \leq 12 \\ 11\dfrac{5}{6}<k<14\dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow k=12,13,14 \text{且} k \leq 12$

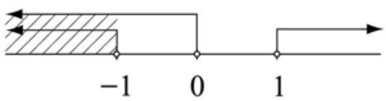
則 $k=12$

7、$y=f(x)=kx^2+2x+k$ 之圖形如下，求實數 k 之範圍爲__________。



$\boxed{\text{答案}}$：$k<-1$

$\boxed{\text{解析}}$：$\begin{cases} k<0 \\ 2^2-4k\cdot k<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k<0 \\ k^2>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k<0 \\ k>1 \text{或} k<-1 \end{cases}$，故知 $k<-1$。



8、不論 a 爲任何實數，$a(x-3)(x+1)+(x-b)=0$ 之根恆有實根則 b 的範圍爲_______。

$\boxed{\text{答案}}$：$-1 \leq b \leq 3$

$\boxed{\text{解析}}$：$ax^2-2ax+x-3a-b=0$ 恆有實根

$\therefore D=(-2a+1)^2-4a(-3a-b)>0$ $\therefore 16a^2+4(b-1)a+1 \geq 0$

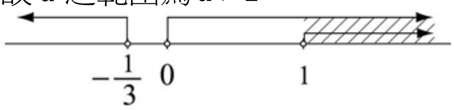
對任意實數 a 均成立 $\therefore 16(b-1)^2-4\times 16\times 1 \leq 0$ $\therefore -1 \leq b \leq 3$

9、設 $a \in \mathbb{R}$，若 $ax^2+(a-1)x+(a-1)>0$ 對所有實數 x 均成立，則 a 之範圍爲__________。

$\boxed{\text{答案}}$：$a>1$

$\boxed{解析}$：$\begin{cases} a>0 \\ (a-1)^2-4a(a-1)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ (a-1)(3a+1)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ a>1或a<-\dfrac{1}{3} \end{cases}$

故 a 之範圍為 $a>1$。



10、設 $f(x)=-x^2+(a-4)x+a,\ g(x)=x^2-6x+1$ 對任意實數 x 恆有 $f(x)<g(x)$，則實數 a 的範圍為________。

$\boxed{答案}$：$-6-2\sqrt{10}<a<-6+2\sqrt{10}$

$\boxed{解析}$：$-x^2+(a-4)x+a<x^2-6x+1$ 恆成立

$\therefore 2x^2-(2+a)x+(1-a)>0$ 恆成立

$\therefore (2+a)^2-4\times 2(1-a)<0 \quad \therefore a^2+12a-4<0$

$-6-2\sqrt{10}<a<-6+2\sqrt{10}$

11、已知 $a>0,\ b>0,\ a+2b=3$ 則 ab 之最大值________，又 a^2b 之最大值為________。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{9}{8}, 2$

$\boxed{解析}$：$\dfrac{a+2b}{2}\ge\sqrt{2ab} \quad \therefore 2ab\le\dfrac{9}{4} \quad \therefore ab\le\dfrac{9}{8}$

$\dfrac{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a+2b}{3}\ge\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}a^2b} \quad \therefore \dfrac{1}{2}a^2b\le 1 \quad \therefore a^2b\le 2$

12、試問不等式 $(x^2-4x+2)(2x-5)(2x-37)\le 0$ 有多少個整數解？

答：_______個。

$\boxed{答案}$：17

$\boxed{解析}$：由 $(x^2-4x+2)(2x-5)(2x-37)\le 0$

得 $(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})(2x-5)(2x-37)\le 0$

其實數解為 $2-\sqrt{2}\le x\le\dfrac{5}{2}$ 或 $2+\sqrt{2}\le x\le\dfrac{37}{2}$

(0.58…) (2.5) (3.414…) (18.5)

其整數解為 $x=1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18$

共有 17 個。

13、設不等式 $ax^2+bx+c<0$ 之解為 $x>2$ 或 $x<-1$，求不等式 $ax^2+2cx-3b>0$ 之解為_______。

$\boxed{答案}$：$1<x<3$

$\boxed{解析}$：$x>2$ 或 $x<-1 \Rightarrow (x-2)(x+1)>0 \quad \therefore -x^2+x+2<0$

$\therefore a=-k,\ b=k,\ c=2k(k>0)$

$-kx^2+4kx-3k>0 \Rightarrow x^2-4x+3<0 \Rightarrow 1<x<3$

14、解不等式 $-1<\dfrac{x-3}{x+1}<2$ 則解為________。

$\boxed{答案}$：$x>1$ 或 $x<-5$

$\boxed{解析}$：同乘 $(x+1)^2 \Rightarrow -(x+1)^2<(x-3)(x+1)<2(x+1)^2$

$\Rightarrow (x+1)(2x-2)>0$ 且 $(x+1)(x+5)>0$

$\Rightarrow \therefore x>1$ 或 $x<-5$

15、設 $a>0, b>0$，求 $(a+b)(\frac{9}{a}+\frac{4}{b})$ 之最小值______。

$\boxed{答案}$：25

$\boxed{解析}$：$(a+b)(\frac{9}{a}+\frac{4}{b})=9+4+\frac{9b}{a}+\frac{4a}{b}$

$\frac{\frac{9b}{a}+\frac{4a}{b}}{2}\geq\sqrt{\frac{9b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=6 \quad \therefore \frac{9b}{a}+\frac{4a}{b}\geq 12 \quad \therefore (a+b)(\frac{9}{a}+\frac{4}{b})\geq 25$

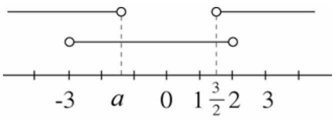
16、設集合 $A=\{x|x^2+x-6<0, x\in\mathbb{Z}\}$，集合 $B=\{x|2x^2-(3+2a)x+3a>0, x\in\mathbb{Z}\}$ 且 $A\cap B=\{-2\}$，則 a 範圍爲________。

$\boxed{答案}$：$-2<a\leq -1$

$\boxed{解析}$：$A=\{x|-3<x<2, x\in\mathbb{Z}\}$

$B=\{x|(2x-3)(x-a)>0, x\in\mathbb{Z}\}$

又 $A\cap B=\{-2\} \quad \therefore -2<a\leq -1$



17、設 $f(x)=x^2+4mx+5m-1$ 當 $0\leq x\leq 2$ 時 $f(x)>0$ 恆成立，求實數 m 的範圍。

$\boxed{答案}$：$f(x)=(x+2m)^2-4m^2+5m-1$

(1) $-2m>2 \quad \therefore f(2)>0\Rightarrow m<-1$ 且 $13m+3>0\Rightarrow$ 無解

(2) $0\leq -2m\leq 2,\ -4m^2+5m-1>0\Rightarrow 0\geq m\geq -1$ 且 $\frac{1}{4}\leq m\leq 1\Rightarrow$ 無解

(3) $-2m<0, f(0)>0\Rightarrow m>0$ 且 $5m-1>0\Rightarrow m>\frac{1}{5}$

18、解不等式 $\frac{x-2}{x-3}>\frac{x+2}{x+5}$。

$\boxed{答案}$：由 $\frac{x-2}{x-3}>\frac{x+2}{x+5}$,

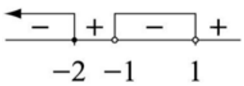
移項，得 $\frac{x-2}{x-3}-\frac{x+2}{x+5}>0$,

合併，得 $\frac{(x-2)(x+5)-(x+2)(x-3)}{(x-3)(x+5)}>0$,

化簡，$\frac{4(x-1)}{(x-3)(x+5)}>0$,

所以 $x+5, x-1, x-3$ 皆正或兩負一正。

即 $x>3$ 或 $-5<x<1$。



19、解不等式 $\frac{x^2-3x+2}{x^2+5x+4}>0$。

$\boxed{\text{答案}}$：由 $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+5x+4}>0$

得 $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+4)}>0$

故 $x<-4$ 或 $-1<x<1$ 或 $x>2$ 。

20、解不等式(1) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+5x+4}>1$　(2) $|x+1|>|2x-1|$ 。

$\boxed{\text{答案}}$：(1) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+5x+4}-1>0$　$\therefore \dfrac{-8x-2}{(x+1)(x+4)}>0$

$\therefore (4x+1)(x+1)(x+4)<0$　$\therefore x<-4$ 或 $-1<x<-\dfrac{1}{4}$

(2) $|x+1|>|2x-1|$　$\therefore (x+1)^2>(2x-1)^2$

$\therefore 3x^2-6x<0$　$\therefore 3x(x-2)<0$　$\therefore 0<x<2$

21、解不等式：

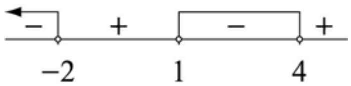
(1) $x^3-3x^2-6x+8<0$ 。　(2) $(x^2-2x-1)(x^2-3x-4)\le 0$ 。

$\boxed{\text{答案}}$：(1)原式 $\Rightarrow (x-1)(x^2-2x-8)<0$

$\therefore (x-1)(x-4)(x+2)<0$

$\therefore x<-2$ 或 $1<x<4$

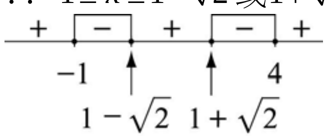
$$\begin{array}{r|l} 1-3-6+8 & 1 \\ +1-2-8 & \\ \hline 1-2-8 & +0 \end{array}$$



(2) $(x^2-2x-1)(x-4)(x+1)=0$

$(\because x^2-2x-1=0,\ \therefore x=1\pm\sqrt{2})$

$\therefore -1\le x\le 1-\sqrt{2}$ 或 $1+\sqrt{2}\le x\le 4$ 。



22、若對於一切實數 x 恆有 $mx^2+(m-1)x+(m-1)>0$ ，試求實數 m 的範圍。

$\boxed{\text{答案}}$：(1)二次項係數 $m>0$ 。

(2)判別式小於 0，故

$(m-1)^2-4m(m-1)<0$

$-(m-1)(3m+1)<0$

$(m-1)(3m+1)>0$

從而 $m>1$ 或 $m<-\dfrac{1}{3}$ 。

由(1)及(2)得 $m>1$ 。

23、解不等式 $\sqrt{9-x^2}>2x+1$ 。

$\boxed{\text{答案}}$： $\sqrt{9-x^2}>2x+1$　$\because \sqrt{9-x^2}$ 有意義 $9-x^2\ge 0$　$\therefore -3\le x\le 3$

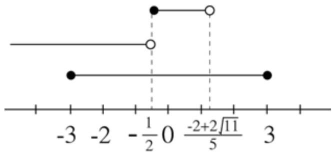
(1)當 $x<-\frac{1}{2}$ 時 $\sqrt{9-x^2}>2x+1$ 必成立

(2)當 $x\geq-\frac{1}{2}$ 時 $2x+1\geq0$

$\therefore \sqrt{9-x^2}>2x+1 \Rightarrow 9-x^2>4x^2+4x+1$

$\Rightarrow 5x^2+4x-8<0 \quad \therefore \frac{-2-2\sqrt{11}}{5}<x<\frac{-2+2\sqrt{11}}{5}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\leq x<\frac{-2+2\sqrt{11}}{5}$



$\therefore -3\leq x<\frac{-2+2\sqrt{11}}{5}$