高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：94.01.10					
範圍	4-5 多項方程式 +Ans	班級		姓名	
		座號			

一、 選擇題 (每題 10 分)

1、(C) 設 α,β,γ 為 $x^3+x^2-4x+5=0$ 的三根，則以下何者錯誤？ (A) $\alpha+\beta+\gamma=-1$
(B) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4$ (C) $\alpha\beta\gamma=5$ (D) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=9$ (E) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-28$

解析：由根與係數知 $\alpha+\beta+\gamma=-1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4,\ \alpha\beta\gamma=-5$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=9$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

$\therefore \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-28$

2、(D) 方程式 $x^4-4x^3-3x^2+x+1=0$ 在下列哪兩個整數之間有實數根？
(A)–3 與 –2 之間 (B)–2 與 –1 之間 (C)–1 與 0 之間 (D)0 與 1 之間 (E)1 與 2 之間

解析：作法：利用勘根定理

令 $f(x)=x^4-4x^3-3x^2+x+1$

則 $f(0)=1,\ f(1)=-6 \Rightarrow f(0)\cdot f(1)<0$

由勘根定理可知在 0 與 1 之間有實根，故選(D)。

3、(D) 設 $f(x)=0$ 為含有 $1,-1+\sqrt{3}$ 與 $2-i$ 的最低實係數方程式則以下何者恆成立？
(A) $\deg f(x)=5$ (B) $f(-1)=0$ (C) $f(-1-\sqrt{3})=0$ (D) $f(2+i)=0$ (E) $f(x)=0$ 之所有根之和為 3

解析：$\because$ 欲求最低實係數方程式

$\therefore$ 此方程式必有 $1,\ -1+\sqrt{3},\ 2-i,\ 2+i$ 四根

$\therefore \deg f(x)=4,\ f(2+i)=0$ 所有根之和 $4+\sqrt{3}$

4、(E) 下列方程式中，何者沒有整數解？ (A) $x^{105}+1=0$ (B) $x^{200}-1=0$
(C) $x^{97}+x^{96}+x^{95}+\cdots+x+1=0$ (D) $x^{97}-x^{96}+x^{95}-x^{94}+x-1=0$
(E) $x^{98}-x^{97}+x^{96}-x^{95}+\cdots-x+1=0$

解析：由牛頓定理知，若有整數解必為 1 或 –1

(A) $(-1)^{105}+1=0$ (B) $(1)^{200}-1=0$

(C) $(-1)^{97}+(-1)^{96}+(-1)^{95}+(-1)^{94}+\cdots+(-1)^1+1=0$

(D) $1^{97}-1^{96}+1^{95}-1^{94}+\cdots+1-1=0$

(E) $1^{98}-1^{97}+1^{96}-1^{95}+\cdots+1^2-1+1=1\neq 0$

$(-1)^{98}-(-1)^{97}+(-1)^{96}-(-1)^{95}+\cdots+(-1)^2-(-1)+1=99$

5、(B) 設 $f(x)=6x^3+ax^2+bx+3$ 則下列何者一定不是 $f(x)=0$ 之根？ (A) -3 (B) $-\frac{2}{3}$
(C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{3}{2}$

解析：由牛頓定理知，若有有理根，則必為 $\pm1,\ \pm3,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{6}$ 故(B)不發生

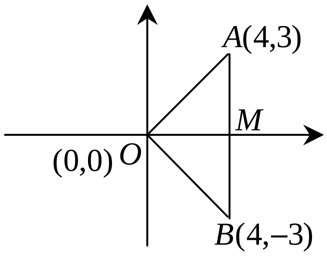
6、(C) 設一元二次整係數方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有一根為 $4+3i$。若將此方程式的兩根與原點在複數平面上標出，則此三點所圍成的三角形面積為

(A)5 (B)6 (C)12 (D)16 (E)24

$\boxed{解析}$：①$\because a,b,c$ 爲實係數，

$\Rightarrow 4-3i$ 亦爲 $ax^2+bx+c=0$ 之一根

②



$$面積=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OM}$$
$$=\frac{1}{2}\times 6\times 4$$
$$=12$$

故應選(C)。

7、(B) 設 $f(x)=6x^3+ax^2+bx+3$，則下列何者一定不是 $f(x)=0$ 之根？

(A) -3 (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{3}{2}$

$\boxed{解析}$：由牛頓定理知，若有有理根，則必爲 $\pm 1,\ \pm 3,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{6}$ 故(B)不發生

8、(ABD) (複選)三次方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$ 在下列那些連續整數之間有根？

(A)–2 與–1 之間 (B)–1 與 0 之間 (C)0 與 1 之間 (D)1 與 2 之間 (E)2 與 3 之間

$\boxed{解析}$：令 $f(x)=x^3+x^2-2x-1$

$\because f(-2)=-8+4+4-1=-1<0$

$f(-1)=-1+1+2-1=1>0$

$f(0)=-1<0$

$f(1)=1+1-2-1=-1<0$

$f(2)=8+4-4-1=7>0$

$\therefore f(-2)\cdot f(-1)<0,\ f(-1)\cdot f(0)<0,\ f(1)\cdot f(2)<0$

故答案爲(A)(B)(D)。

9、(ABE) (複選) 關於三次多項式 $f(x)=x^3-6x^2+1$，試問下列哪些敘述是正確的？

(A) $f(x)=0$ 有實根落在 0 與 1 之間 (B) $f(x)=0$ 有實根大於 1

(C) $f(x)=0$ 有實根小於 -1 (D) $f(x)=0$ 有實根也有虛根 (E) $f(x)=10$ 有實數解

$\boxed{解析}$：(A) $f(0)=1>0,\ f(1)=-4<0$，故 $f(x)=0$ 有實根落在 0 與 1 之間。

(B) $f(1)=-4<0,\ f(6)=1>0$，故 $f(x)=0$ 有實根大於 1。

(C) $f(x)=(x+1)(x^2-7x+7)-6$

當一實數 $r<-1$ 時，必有 $r+1<0$ 且 $r^2-7r+7>0$

使得 $f(r)=\underbrace{(r+1)}_{(負)}\underbrace{(r^2-7r+7)}_{(正)}-6<0$

即小於 -1 的實數 r 會使 $f(r)<0$，而不會使 $f(r)=0$

故方程式 $f(x)=0$ 沒有比 -1 小的實根。

(D)三次方程式 $f(x)=0$ 有三個複數根，今已知 0 與 1 之間有一根，1 以上也有一根，那麼剩下的第三個根必爲實數，不可能爲虛數，因爲實數係數多項方程式的虛根成對出現，虛根個數必爲偶數。

(E)因為 $f(x)=10$，即 $f(x)-10=0$ 是一個實數係數三次方程式，次數為奇數，所以至少有一實數解。

註：從 $f(6)=1<10,\ f(7)=50>10$ 也可知 $f(x)=10$ 有一實根落在 6 與 7 之間。

10、(AE) $f(x)$ 為一實係數五次多項式，則下列何者為真？

(A)若 $f(1+i)=f(i)=0$，則 $f(x)=0$ 恰有一實根

(B)若 $f(2+5i)=2i-3$，則 $f(2-5i)=2i+3$

(C)若 $f(a)f(b)<0$，則 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間恰有一實根

(D)若 $f(a)f(b)>0$，則 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間沒有實根

(E) $f(x)=0$ 至少有一實根

二、填充題 (每題 10 分)

1、$ax^3+bx^2-29x-10$ 可因式分解出 $(3x+1)$ 與 $(x-2)$ 的因式，則第三個因式為＿＿＿＿，又數對 (a, b) =＿＿＿＿。

答案：$2x+5$, $(6, 5)$

解析：$ax^3+bx^2-29x-10=(3x+1)(x-2)(kx+5)$

$-29=-25-2k \quad \therefore k=2$

又 $(3x+1)(x-2)(2x+5)$

$=6x^3+5x^2-29x-10 \quad \therefore a=6,\ b=5$

2、設 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ 且 $f(2+i)=7-5i$，則 $f(2-i)=$＿＿＿＿。

答案：$7+5i$

解析：$f(2-i)=f(\overline{2+i})=\overline{f(2+i)}=\overline{7-5i}=7+5i$。

3、設 a 為實數，令 α、β 為二次方程式 $x^2+ax+(a-2)=0$ 的兩個根。試問當 a 為何值時，$|\alpha-\beta|$ 有最小值？

答案：2

解析：由根與係數關係得知 $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=a-2$

$$|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=(-a)^2-4(a-2)$$
$$=a^2-4a+8$$
$$=(a-2)^2+4$$

因此，$|\alpha-\beta|=\sqrt{(a-2)^2+4}$

故當 $a=2$ 時 $|\alpha-\beta|$ 有最小值

4、已知 $f(x)=x^4+4x^3-32x-13=0$ 有一根 $-3-2i$，則 $f(x)=0$ 之所有根為＿＿＿＿＿＿。

答案：$-3\pm 2i,\ 1\pm\sqrt{2}$

解析：令 $x=-3-2i$

$x+3=-2i$

$x^2+6x+9=-4$

$x^2+6x+13=0$

由綜合除法得知

$f(x)=(x^2+6x+13)(x^2-2x-1)$

$\therefore f(x)=0$ 之根為：$-3\pm 2i,\ 1\pm\sqrt{2}$ 。

5、方程式 $2x^4-x^3+2x^2-6x-5=0$ 有一根 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，試寫出此方程式之所有的根為________。

$\boxed{\text{答案}}$：$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{39}i}{4}$

$\boxed{\text{解析}}$：設 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，則 $x^2-x-1=0$

$2x^4-x^3+2x^2-6x-5=(x^2-x-1)(2x^2+x+5)$ ，$\therefore$方程式的根為 $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\frac{-1\pm\sqrt{39}i}{4}$

6、求多項式 $f(x)=3x^4+x^3-3x^2-19x-6$ 的全部整係數一次因式，則其為______________。

$\boxed{\text{答案}}$：$x-2,\ 3x+1$

$\boxed{\text{解析}}$：由牛頓定理知若有整係數一次因式必為下列因式：

$(x\pm1),(x\pm2),(x\pm3),(x\pm6),(3x\pm1),(3x\pm2)$

經檢驗得 $f(2)=0,\ f(-\frac{1}{3})=0$ $\therefore$其一次因式有 $(x-2)$ 與 $(3x+1)$ 。

7、若 a 為實數，且 $f(x)=x^4+x\ \ 3+2ax^2-3x-a=0$ 在區間 $(0,1)$ 及$(-2,-1)$間各有一根，求 a 之範圍________________。又若 $f(5+2i)=7$ ，則 $f(5-2i)=$________________。

$\boxed{\text{答案}}$：$-3<a<-2$；7

8、設 $-1+\sqrt{2}i$ 為實係數方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 之一根，若此方程式與方程式 $x^2+ax-2=0$ 恰有一個公根，則 $a=$__________， $b=$__________， $c=$__________。

$\boxed{\text{答案}}$：1, 1, -3

$\boxed{\text{解析}}$：$x=-1+\sqrt{2}i\Rightarrow x^2+2x+3=0\qquad \therefore x^2+2x+3\mid x^3+ax^2+bx+c$

且設 x^3+ax^2+bx+c 與 x^2+ax-2 之最高公因式為 $x-\alpha$

〔$\because x^3+ax^2+bx+c=0$ 與 $x^2+ax-2=0$ 恰有一個公根〕

$\therefore (x-\alpha)\mid(x^3+ax^2+bx+c)$

$(x-\alpha)\mid x^2+ax-2$

$\Rightarrow (x-\alpha)\mid x^3+ax^2+bx+c-x(x^2+ax-2)$

$\therefore (x-\alpha)\mid(b+2)x+c$

令 $\alpha=\frac{-c}{b+2}$ 代入 $x^2+ax-2=0$ ，得 $c^2-ac(b+2)-2(b+2)^2=0$

又$\because x^2+2x+3\mid x^3+ax^2+bx+c\Rightarrow b-3=2(a-2),c=3(a-2)$

故$6a^3-10a^2+38a-34=0$

$(a-1)(3a^2-2a+17)=0\ \therefore a=1,b=1,c=-3$

9、設 $f(x)=-x^2+(a+1)x+2,\ a\in\mathbb{R}$，若方程式 $f(x)=0$ 。有一根在-1與 0 之間，另一根在 2 與 3 之間則 a 的範圍為____________________。

$\boxed{\text{答案}}$：$0<a<\frac{4}{3}$

$\boxed{\text{解析}}$：由勘根定理知 $\because f(-1)\cdot f(0)<0$且 $f(2)\cdot f(3)<0$

$f(0)=2>0, \therefore f(-1)=-a-2+2<0 \therefore a>0$

$f(2)=-4+2a+2+2=2a>0$

$\therefore f(3)=-9+3a+3+2<0 \quad \therefore a<\frac{4}{3} \Rightarrow 0<a<\frac{4}{3}$

10、有一多項式 $f(x)=2x^3+3x^2-10x+4$ ，則 $f(x)=0$ 之有理根爲________ 。

答案：$\frac{1}{2}$

解析：$\because f(x)=(2x-1)(x^2+2x-4)$ ，$\therefore f(x)=0$ 之有理根爲 $\frac{1}{2}$ 。

11、設 $a,b\in\mathbb{Z}$，若 $x^4+x^3+ax^2+bx-10=0$ 四根均爲整數，則 $a=$______ , $b=$______ 。

答案：$-15, 23$

解析：$\because a,b\in\mathbb{Z}$ 且 $x^4+x^3+ax^2+bx-10=0$ 四根 α ,β ,γ ,δ 均爲整數 $\Rightarrow \alpha\beta\gamma\delta=-10$

且 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-1$ $\therefore$ 合於條件之四根爲 $1, 1, 2, -5$

(ps.由討論法知 $\alpha\beta\gamma\delta=-10$ 且 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-1$ 則此四根中不可能出現 10 或 -10)

$\therefore$ 方程式爲 $(x-1)(x-1)(x-2)(x+5)=x^4+x^3-15x^2+23x-10$

$\therefore a=-15,\ b=23$

12、設方程式 $x^3-3x^2+kx+8=0$ 的三根由小而大排列成等差數列，則 $k=$______，又三根爲________ 。

答案：$-6,\ -2, 1, 4$

解析：設三根 $a-d,\ a,\ a+d$ $\quad \therefore a-d+a+a+d=3$

$\therefore a=1$ ，又 $(1-d)\times 1\times(1+d)=-8$ $\quad \therefore d=\pm 3$

$\therefore$ 三根爲 $-2, 1, 4$ $\therefore k=-2+4-8=-6$

13、求含有 -2 及 i 兩根的最低次實係數方程式：___________ 。

答案：$x^3+2x^2+x+2=0$

14、求最低次有理係數方程式使此方程式含有 $1, -1+\sqrt{3}$ 與 $2-i$ 這三個根。則此方程式爲________ 。

答案：$x^5-x^4-7x^3+13x^2+8x-10=0$

解析：$x=-1+\sqrt{3} \Rightarrow x^2+2x-2=0$

$x=2-i \Rightarrow x^2-4x+5=0$

$\therefore$ 方程式爲 $(x-1)(x^2+2x-2)(x^2-4x+5)=0$

即 $x^5-x^4-7x^3+13x^2+8x-10=0$

15、設 a, b 爲實數，若方程式 $x^4-8x^3+ax^2+bx-13=0$ 有一根 $2+3i$。

(1)求 a, b 之值。

(2)解方程式 $x^4-8x^3+ax^2+bx-13=0$ 。

答案：(1) $a=28$；$b=-48$ (2) $x=2\pm 3i, 2\pm\sqrt{5}$

16、設 $k\in\mathbb{Z}$, $f(x)=x^4+2x^3+kx^2-3kx-3$ 爲整係數多項式，若已知 $f(x)$ 有整係數之一次因式，則 $k=$________ 或________ 。

答案：0, 1

$\boxed{\text{解析}}$：$\because f(x)$有整係數一次因式，則必爲下列因式

$(x\pm1),(x\pm3)$ $\therefore f(1)=-2k=0$ $\therefore k=0$

$f(-1)=4k-4=0$ $\therefore k=1$

$f(+3)=132\neq0,\ f(-3)=18k+24=0,\ k=-\dfrac{4}{3}$(不合)

$\therefore k=0$ 或 1

17、設 $a,b,c\in\mathbb{Z}$，若 $x^4+ax^3+bx^2+cx+9=0$ 有四個相異之有理根，則 $(a,b,c)=$____________。

$\boxed{\text{答案}}$：$(0,-10,0)$

$\boxed{\text{解析}}$：可能之有理根爲 $\pm1,\pm3,\pm9$ ，且四相異根之積爲 9

$\therefore x^4+ax^3+bx^2+cx+9$

$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

$=(x^2-1)(x^2-9)$

$=x^4-10x^2+9$

故 $(a,b,c)=(0,-10,0)$ 。

18、設 $\alpha\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$ ，若 $\alpha^3+\alpha-3=0$ 且 $n<\alpha<n+1$，則 $n=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：1

$\boxed{\text{解析}}$：

$1+0+1-3$	$f(a)$	$\alpha=a$
$1+0+1-3$	-3	0
$1+1+2-1$	-1	1
$1+2+5+7$	$+7$	2

根

$\therefore 1<\alpha<2\Rightarrow n=1$ 。

19、求方程式 $f(x)=2x^4+7x^3-x^2-17x-6=0$ 的全部有理根爲_______或______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：$-2,\ \dfrac{3}{2}$

$\boxed{\text{解析}}$：

$$\begin{array}{l|l}
2+7-1-17-6 & -2 \\
\quad -4-6+14+6 & \\
\hline
2+3-7-3 & +0 \\
\quad +3+9+3 & \dfrac{3}{2} \\
\hline
2+6+2+0 &
\end{array}$$

由牛頓定理知其若有有理根必爲 $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{3}{2}$ 。

$\therefore$有理根爲 -2 與 $\dfrac{3}{2}$

20、設 $a,b\in\mathbb{R}$ ，且 $1+i$ 爲 $f(x)=x^3+ax+b=0$ 之一根，求數對 $(a,b)=$__________，另二根

爲__________。

答案：$(-2,4)$；$-2,1-i$

解析：$1+i$ 爲 $f(x)=0$ 之一根，則 $1-i$ 必爲 $f(x)=0$ 之另一根

$\therefore$ 令 $x=1+i \Rightarrow (x-1)^2=i^2$，$\therefore x^2-2x+2=0$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+\quad 2 \\
1-2+2 & 1+0+\quad a+\quad b \\
 & 1-2+\quad 2 \\
\hline
 & \quad 2+(a-2)+\quad b \\
 & \quad 2-\quad 4+\quad 4 \\
\hline
 & \quad (a+2)+(b-4)
\end{array}
$$

$\therefore \begin{cases} a+2=0 \\ b-4=0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$

$\therefore (a,b)=(-2,4)$

$\therefore f(x)=(x+2)(x^2-2x+2)=0$，$\therefore x=-2$ 或 $1\pm i$。

21、設 x, y, z 滿足 $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ xyz=6 \end{cases}$

以 x, y, z 爲三次方程式 $t^3+at^2+bt+c=0$ 的三根則數對 (a, b, c) = ________，又若 $x\le y\le z$，則數對 (x, y, z) = ________。

答案：$(2,\ -5,\ -6)$, $(-3,\ -1,\ 2)$

解析：$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=-5$

由根與係數知 $x+y+z=-a$　$xy+yz+zx=b$　$xyz=-c$

$\therefore a=2,\ b=-5,\ c=-6$

$\therefore t^3+2t^2-5t-6=0$ 由牛頓定理檢查可得

$(t+1)(t+3)(t-2)=0$　$\therefore$ 三根爲 $-1, -3, 2$

$\because x\le y\le z$　$\therefore (x, y, z) = (-1, -3, 2)$

22、設 $f(x) = x^4 + x - 76$ 試探 $f(3), f(2.9)$ 之值，以二分逼近法求方程式 $f(x) = 0$ 在 3 附近的近似根，介於 a 與 $a + 0.0125$ 之間。

答案：(1) $f(3) = 81 + 3 - 76 = 8 > 0$

$f(2.9) = 70.7281 + 2.9 - 76 = -2.3719 < 0$

(2)$(3 + 2.9) \div 2 = 2.95$

$f(2.95) = 2.6835 > 0$

此根介於 2.9 與 2.95 之間

(3)$(2.9 + 2.95) \div 2 = 2.925$

$f(2.925) = 0.1237 > 0$

此根介於 2.9 與 2.925 之間

(3)$(2.9 + 2.925) \div 2 = 2.9125$

$f(2.9125) = -1.1320 < 0$

此根介於 2.9125 與 2.925 之間

23、試證明牛頓有理根定理。

(定理：整係數多項式 $f(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j x^j$ ，若有整係數一次因式 $kx-h$ ，其中 h, k 互質，則 a_n 是 k 的倍數，a_0 也是 h 的倍數。)

$\boxed{\text{答案}}$： $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$

若 $(kx-h)\mid f(x)$ 且 $(h, k)=1$ $\therefore f(\frac{h}{k})=0$

$\therefore a_n(\frac{h}{k})^n+a_{n-1}(\frac{h}{k})^{n-1}+\cdots+a_1(\frac{h}{k})+a_0=0$

$\therefore a_n h^n+a_{n-1}h^{n-1}k+\cdots+a_1 hk^{n-1}+a_0 k^n=0$

$h(a_n h^{n-1}+a_n h^{n-2}k+\cdots+a_1 k^{n-1})=-a_0 k^n$

$\because (h,k)=1$ $\therefore (h,k^n)=1$，又 $h\mid a_0 k^n$ $\therefore h\mid a_0$

同理可證 $k\mid a_n$ 。