高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：94.01.10					
範圍	4-4 多項函數+Ans	班級		姓名	
		座號			

一、 選擇題 (每題 10 分)

1、(C) 針對二次函數 $y=2x^2+4x-3$ 的極值討論，以下何者正確？

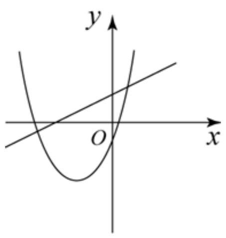
(A) y 有最大值 -5　(B) y 有最小值 -3　(C) $-2\le x\le 2$ 時，y 有最大值 13

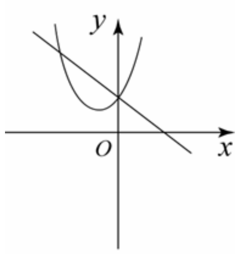
(D) $-2\le x\le 2$ 時，y 有最小值 -3　(E) $0\le x\le 2$ 時，y 有最小值 -5

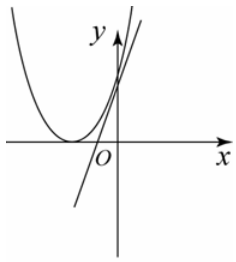
解析：$y=2x^2+4x-3=2(x^2+2x+1)-5=2(x+1)^2-5$，$\therefore$ y 最小值 -5

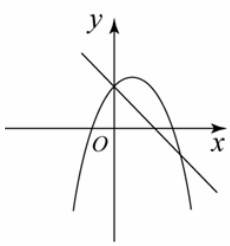
當 $-2\le x\le 2$ 時，y 有最大值 13，最小值 -5；當 $0\le x\le 2$ 時，y 有最小值 -3

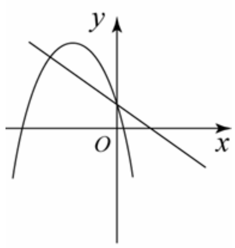
2、(C) 在 xy 平面上，畫出 $y=mx+b$，與 $y=ax^2+mx+b$ 的圖形，下面那一個選項可能發生，$(a\ne 0)$？

(A) 

(B) 

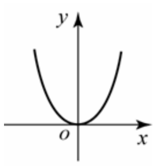
(C) 

(D) 

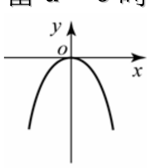
(E) 

解析：$\because y=mx+b$ 與 $y=ax^2$，相加得 $y=ax^2+mx+b$

當 $a>0$ 時，$y=ax^2$ 爲



當 $a<0$ 時爲



故 $a>0$ 時 $y=ax^2+mx+b$ 恆大於 $y=mx+b$；

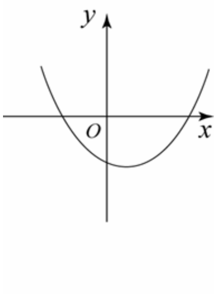
反之 $a<0$ 時 $y=ax^2+mx+b$ 恆小於 $y=mx+b$；

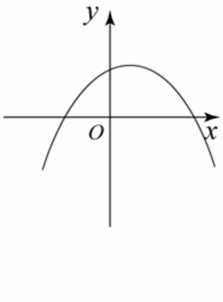
且兩圖形之 y 截距均相同爲 $(0, b)$

3、(C)　已知二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形，會通過四個象限，則其充要條件為

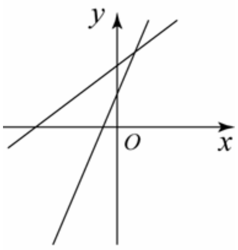
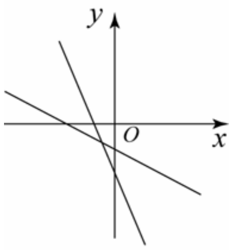
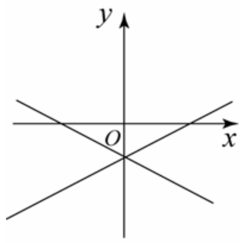
(A) $b^2-4ac>0$　(B) $ac>0$　(C) $ac<0$　(D) $a>0$　(E) $a<0$

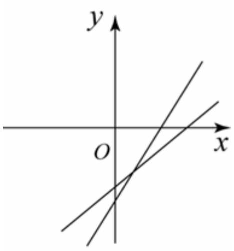
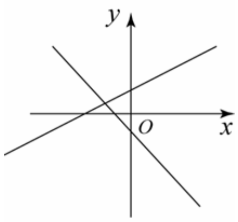
$\boxed{解析}$：兩實根異號 $\alpha\beta<0$ 即充要條件 $ac<0$





4、(A)　在 xy 平面上畫出 $y=ax+b$ 與 $y=bx+a$ 的圖形 $(a\neq b)$，則下面那一個選項可能發生？

(A)  (B)  (C) 

(D)  (E) 

$\boxed{解析}$：$\begin{cases} y=ax+b \\ y=bx+a \end{cases} \Rightarrow (1,a+b)$，故只剩下(A)與(D)，二線斜率為正，故截距 $a+b$ 為正。

二. 填充題 (每題 10 分)

5、設 $y=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-9)^2$，則當 $x=$________時，y 有最小值為________。

$\boxed{答案}$：4, 38

$\boxed{解析}$：$y=3x^2-24x+86=3(x-4)^2+38$，$\therefore x=4$，$y$ 有最小值 38

6、二次函數 $y=x^2+2(a+1)x+a^2+4a+6$ 與二次函數 $y=-x^2+2bx-b^2+2b-1$ 有相同的頂點，則 $a=$________, $b=$________。

$\boxed{答案}$：$-2,\ 1$

$\boxed{解析}$：$\begin{matrix} y=(x+a+1)^2+2a+5 \\ y=-(x-b)^2+2b-1 \end{matrix}$，頂點相同 $\Rightarrow \begin{cases} -a-1=b \\ 2a+5=2b-1 \end{cases}$　$\therefore a=-2,\ b=1$

7、將二次函數 $y=2x^2-4x+3$ 之圖形沿著 x 軸向左平移 2 個單位，沿著 y 軸向上平移 3 個

單位後所得到之新方程式爲＿＿＿＿＿＿。（以 $y=ax^2+bx+c$ 表示）

答案：$y=2x^2+4x+6$

解析：原函數：$y=2x^2-4x+3=2(x^2-2x+1)+1=2(x-1)^2+1$

沿著 x 軸向左平移 2 個單位，沿著 y 軸向上平移 3 個單位頂點 $(1,1)\to(-1,4)$

平移後：$y=2(x+1)^2+4=2(x^2+2x+1)+4=2x^2+4x+6$。

8、設 $y=f(x)=(x^2+2x+1)(x^2+2x+5)-2(x^2+2x+7)+9$，則當 $x=$＿＿＿＿時，$f(x)$ 有最小値爲＿＿＿＿　。

答案：$-1,\quad -3$

解析：令 $x^2+2x+1=t$　$\therefore (x+1)^2=t$　$\therefore t\ge 0$

$y=t(t+4)-2(t+6)+9\quad =t^2+2t-3=(t+1)^2-4$ 但 $t\ge 0$

$\therefore$ 在 $t=0$ 即 $x=-1$ 時 $f(x)$ 有最小值 -3

9、設 $f(x)=ax^2+bx+2$，當 $x=1$ 時有最小値 -1，則數對 $(a,b)=$＿＿＿＿

答案：$(3,-6)$

解析：$y=f(x)=ax^2+bx+2=a(x-1)^2-1$

$\Rightarrow ax^2+bx+2=ax^2-2ax+(a-1)$

$\therefore \begin{cases} b=-2a \\ 2=a-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-6 \end{cases}$, $\therefore (a,b)=(3,-6)$。

10、一個二次函數，通過 $(3,1),(1,1)$ 和 $(-1,5)$ 三點，求此二次函數 $y=$＿＿＿＿，又其頂點坐標爲＿＿＿＿。

答案：$\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2},\quad (2,\frac{1}{2})$

解析：過 $(3,1),(1,1)$，頂點 $\Rightarrow (\frac{3+1}{2},k)$，設 $y=a(x-2)^2+k$ 代入 $(-1,5)$,$(1,1)$ 得 $a=\frac{1}{2},k=\frac{1}{2}$

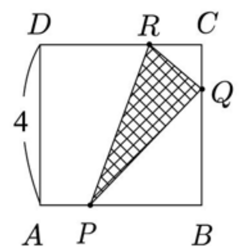
$\therefore y=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2}$，且其頂點爲 $(2,\frac{1}{2})$

11、將 15 分成兩個整數，使其乘積爲最大，則此二數爲＿＿＿＿與＿＿＿＿。

答案：7, 8

解析：$x+y=15$ 求 xy 之 max，此時 $x=y$ 但 x、y 均爲整數，故取二數爲 7 與 8。

12、在邊長爲 4 的正方形 $ABCD$ 的三邊長 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD}$ 上各取一點 P,Q,R，使 $2\overline{AP}=\overline{BQ}=2\overline{CR}$，則 $\triangle PQR$ 的最小面積爲＿＿＿＿＿，此時 $\overline{AP}=$＿＿＿＿。



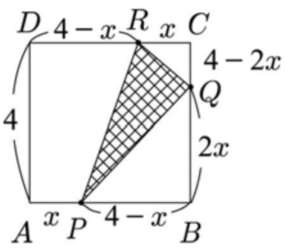
答案：$\frac{7}{2}$；$\frac{3}{2}$

解析：設 $2\overline{AP}=\overline{BQ}=2\overline{CR}=2x$，$\overline{PB}=\overline{DR}=4-x,\quad \overline{CQ}=4-2x$

$\triangle PQR$ 面積

$=16-\frac{4\cdot(4-x+x)}{2}-\frac{1}{2}(4-x)\cdot 2x-\frac{1}{2}x\cdot(4-2x)=2x^2-6x+8$

$=2(x-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{2}$



$\therefore$當 $x=\dfrac{3}{2}$ 時，最小值 $=\dfrac{7}{2}$。即 $\overline{AP}=\dfrac{3}{2}$ 時，$\triangle PQR$ 的最小面積爲 $\dfrac{7}{2}$。

13、設二次函數 $y=f(x)=ax^2+2bx+\dfrac{4}{b}$ 在 $x=1$ 時有最大値 5，則數對 $(a,b)=$______或______。

答案：$(-1,1),(-4,4)$

解析：
$$y=ax^2+2bx+\frac{4}{b}=a(x-1)^2+5$$
$$ax^2+2bx+\frac{4}{b}=ax^2-2ax+(a+5)$$

$\therefore 2b=-2a,\ \dfrac{4}{b}=a+5\quad \therefore a=-1$ 或 $-4\Rightarrow(a,b)=(-1,\ 1)$ 或 $(-4,\ 4)$

14、梨山有一片梨園，如果種 300 棵，則每棵平均生出 400 個梨子。但是若多種一棵，則每棵少生 10 個梨子；若少種一棵，則每棵多生 10 個梨子。問應種多少棵，才能得到最大的收穫量？

答案：假設多種 x 棵，則收穫量 y 爲：$y=(300+x)(400-10x)=-10(x+130)^2+289000$。

當 $x=-130$ 時，即種 170 棵時，每棵生產 1700 個梨子，最大收穫量 289000 個梨子。

15、設 $y=x^2-2x-5$ 與 $y=2x-1$ 兩圖形交於 A,B 兩點，則 $\overline{AB}$ 之長爲________。

答案：$4\sqrt{10}$

解析：$\begin{cases} y=x^2-2x-5 \\ y=2x-1 \end{cases}\quad \therefore x^2-4x-4=0$ 其解爲 α,β

故 $\alpha+\beta=4,\ \ \alpha\beta=-4,\ \ A(\alpha,2\alpha-1),\ \ B(\beta,2\beta-1)$

$\overline{AB}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(2\alpha-1-2\beta+1)^2}=\sqrt{5(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{5}\,|\alpha-\beta|$

$(|\alpha-\beta|)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16+16=32\ \ \therefore|\alpha-\beta|=4\sqrt{2}\ \ \therefore\overline{AB}=4\sqrt{10}$

16、設 $x,y\in\mathbb{R}$ 且 $x^2+3y^2=6y$，則 x^2+4y+1 的最大値爲_________，最小值爲_________。

答案：$\dfrac{28}{3};1$

解析：$\because x^2=-3y^2+6y\ge 0\Rightarrow 3y(y-2)\le 0\Rightarrow 0\le y\le 2$

原式 $=x^2+4y+1$

$=-3y^2+6y+4y+1$

$=-3(y-\dfrac{5}{3})^2+\dfrac{28}{3},0\le y\le 2$

$\therefore$最大值 $=f(\dfrac{5}{3})=\dfrac{28}{3}$，最小值 $=f(0)=1$。