高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：94.01.07					
範圍	4-3 HCF&LCM+Ans	班級		姓名	
		座號			

一、 選擇題 (每題 10 分)

1、(B) 已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最低公倍式為 $(x+1)(x-2)(x+3)$ 則下列那一組 $f(x),g(x)$ 合於此條件？ (A) $f(x)=x^2+4x+3$，$g(x)=x^2+6x+9$ (B) $f(x)=x^2-x-2$，$g(x)=x^2+4x+3$ (C) $f(x)=x^2+5x-6$，$g(x)=x^2-x-2$ (D) $f(x)=x^2+3x+2$，$g(x)=x^2+x-6$ (E) $f(x)=x-2$，$g(x)=x^3-7x-6$

解析：(A) $f(x)=(x+1)(x+3)$，$g(x)=(x+3)^2$(不合)
(B) $f(x)=(x-2)(x+1)$，$g(x)=(x+1)(x+3)$ (C) $f(x)=(x+6)(x-1)$(不合)；
(D) $f(x)=(x+1)(x+2)$(不合) (E) $f(x)=(x-2)$，$g(x)=(x+2)(x-3)(x+1)$(不合)

2、(C) 若 $f(x)=x^3+ax^2+4x-7$ 與 $g(x)=x^2+bx+5$ 之最高公因式為整係數一次式且 $a,b\in\mathbb{N}$，則 $a+2b=$？ (A) 18 (B) 20 (C) 24 (D) 28 (E) 30

解析：設 $x-k$ 為 $f(x)$，$g(x)$ 之 $H.C.F \Rightarrow k|7,k|5\Rightarrow k=\pm1$，
即 $f(x)$ 與 $g(x)$ 可能的一次因式為 $x\pm1$
(1)若 $(f(x),g(x))=x-1, g(1)=0\Rightarrow b=-6$（不合）
(2)若 $(f(x),g(x))=x+1,\begin{cases}g(-1)=0\\f(-1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=12\\b=6\end{cases}$，$a+2b=24$

二、 填充題 (每題 10 分)

3、若兩多項式 $f(x)=2x^3-4x^2+2x+(2c+4)$ 與 $g(x)=3x^3-6x^2+2x+(3c+5)$ 的最高公因式為一次式，則 c 之值為________。

答案：2

解析：設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式為 $h(x)$，則
$h(x)\big|f(x)=2x^3-4x^2+2x+(2c+4)$
$h(x)\big|g(x)=3x^3-6x^2+2x(3c+5)$
$h(x)\big|3f(x)-2g(x)=2x+2=2(x+1)$，$\therefore h(x)=x+1$
$f(-1)=0\Rightarrow -2-4-2+2c+4=0$，$2c=4, c=2$。

4、$f(x)$，$g(x)$ 為兩整係數多項式，其最低公倍式為 $x^4+x^3-4x^2+2x-12$，最高公因式為 $x+3$ 且知 $\deg f(x)>\deg g(x)$，則 $f(x)=$________，$g(x)=$________。

答案：$f(x)=(x+3)(x^2+2)$，$g(x)=(x+3)(x-2)$

解析：$lcm\times hcf=f(x)\cdot g(x)\Rightarrow\dfrac{lcm}{hcf}=x^3-2x^2+2x-4=(x-2)(x^2+2)$
$\therefore f(x)=(x+3)(x^2+2)$，$g(x)=(x+3)(x-2)$

5、已知 $f(x)=x^3+ax^2-2x-4$，$g(x)=4x^3+x^2-2a^2x-2$ 最高公因式 $H(x)$ 為二次式，則 $a=$________，又 $H(x)=$________。

答案：$2, x^2-2$

解析：去頭去尾

$H(x)=\text{hcf}(g(x), f(x)) \Rightarrow H(x)\big|(4a-1)x^2+(2a^2-8)x-14$

$H(x)\big|7x^3+(2-a)x^2+(2-4a^2)x$ ，$\because x\nmid H(x)$

$\therefore \dfrac{4a-1}{7}=\dfrac{2a^2-8}{2-a}=\dfrac{-14}{2-4a^2}$， $\therefore a=2$或$-\dfrac{3}{2}$(不合)$, H(x)=x^2-2$ ，

6、設 $f(x)=x^2+(k+1)x-2k$，$g(x)=x^2+(k-1)x+(6-2k)$ 已知 $f(x)$，$g(x)$ 的最高公因式 $H(x)$ 爲一次式，則 $H(x)=$________，又 $k=$________。

答案：$x-3, -12$

解析：$H(x)\big|f(x)-g(x)$ $\therefore H(x)\big|2x-6$ $\therefore H(x)=x-3$ $f(3)=0$ $\therefore k=-12$

7、$k\in\mathbb{R}$，多項式 $f(x)=x^3+2x^2-x-2$，$g(x)=x^3+(k+2)x^2+(k^2-5)x+6$，

(1)若 $f(x)$，$g(x)$ 的最高公因式爲一次式時，$k=$________，

(2)若 $f(x)$，$g(x)$ 的最高公因式 $H(x)$ 爲二次式時，$k=$________，此時 $H(x)=$________。

答案：(1) $-2, -3$　　　　(2) $4, (x+1)(x+2)$

解析：$f(x)=(x+1)(x-1)(x+2)$

$x+2\,|\,g(x)\Rightarrow g(-2)=-2k^2+4k+16=-2(k-4)(k+2)=0\Rightarrow k=4,-2$

$x+1\,|\,g(x)\Rightarrow g(-1)=-k^2+k+12=-(k-4)(k+3)=0\Rightarrow k=4,-3$

$g(1)=k^2+k+4=(k+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{15}{4}>0\Rightarrow x-1\nmid g(x)$

$\therefore$當 $f(x)$，$g(x)$ 的最高公因式爲一次時 $k=-2$ 或 -3

當 $f(x)$，$g(x)$ 的最高公因式爲二次時 $k=4$，$H(x)=(x+1)(x+2)$

8、求 $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ 與 $g(x)=x^3-x^2+4x-12$ 的最高公因式爲________，最低公倍式爲____________________。

答案：$x-2$ ；$(x-2)(x+5)(x+1)(x^2+x+6)$

解析：利用輾轉相除法

1	$1+4-7-10$	$1-1+4-12$	
	$1-1+4-12$	$\times$　　5	
5	$5-11+2$	$5-5+20-60$	1
	$5+15-50$	$5-11+2$	
-26	$-26+52$	6　$6+18-60$	
	$1-2$	$1+3-10$	$1+5$
		$1-2$	
		$5-10$	
		$5-10$	
		0	

$\therefore (f(x), g(x))=x-2$

$[f(x), g(x)]=\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{x-2}=\dfrac{f(x)\cdot(x-2)(x^2+x+6)}{x-2}=(x-2)(x+5)(x+1)(x^2+x+6)$ 。

9、設 $f(x)=x^3+x^2-4x+(a-7)$ 與 $g(x)=2x^3-7x^2+(2a-8)$ 的最低公倍式爲五次式，求

$a=$________。

答案：3

解析：令 $d(x)=(f(x),g(x))$，$lcm\times hcf = f(x)\cdot g(x)\Rightarrow d(x)$ 爲一次式

$\therefore d(x)\big| f(x)=x^3+x^2-4x+(a-7)$；$d(x)\big| g(x)=2x^3-7x+(2a-8)$

$\Rightarrow d(x)\big|2f(x)-g(x)=2x^2-x-6=(2x+3)(x-2)$

$\therefore d(x)=x-2$ $(\because 2x+3\nmid f(x))$，$\therefore g(x)=16-14+2a-8=0\Rightarrow a=3$。

10、設多項式 $f(x)=x^3-6x^2+11x-3,\, g(x)=x^3-8x^2+19x-8$，有一實數 α 使得 $f(\alpha)=3$ 且 $g(\alpha)=4$，求 $\alpha=$_______。

答案：1 或 3

解析：$\begin{cases} f(\alpha)=3 \\ g(\alpha)=4 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} h(\alpha)=f(\alpha)-3=0 \\ k(\alpha)=g(\alpha)-4=0 \end{cases}$，其中 $\begin{matrix} h(x)=x^3-6x^2+11x-6 \\ k(x)=x^3-8x^2+19x-12 \end{matrix}$

$\therefore x-\alpha\big|(h(x),k(x))=x^2-4x+3$ (以輾轉相除法求出)，$\therefore \alpha^2-4\alpha+3=0,\ \therefore \alpha=1$ 或 3。

11、若多項式 $f(x)=x^3+2x^2-x-2,\, g(x)=x^3+(k+2)x^2+(k^2-5)x+6$ 的最高公因式爲一次式，其中 $k\in\mathbb{R}$，則 $k=$__________。

答案：-2 或 -3

解析：$f(x)=x^3+2x^2-x-2=(x+2)(x-1)(x+1)$

設 $g(1)=0\Rightarrow k^2+k+4=0\Rightarrow k\notin\mathbb{R}$，

$g(-1)=0\Rightarrow k^2-k-12=0\Rightarrow k=4$ 或 -3

$g(-2)=0\Rightarrow k^2-2k-8=0\Rightarrow k=4$ 或 -2，

故當 $k=-2$ 或 -3 時，$f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式爲一次式。

12、利用輾轉相除法，求 $f(x)=x^4-2x^3+2x^2-9x+6,\ g(x)=x^3+x^2+2x+3$ 的最高公因式爲何？

答案：

1	1 − 2 + 2 − 9 + 6	1 + 1 + 2 + 3		1
	1 + 1 + 2 + 3	1 − 2 + 5		
−3	− 3 + 0 − 12 + 6	3	3 − 3 + 3	
	− 3 − 3 − 6 − 9		1 − 1 + 1	−1
3	3 − 6 + 15		1 − 4	
	1 − 2 + 5		3 + 1	−3
	1 − 1 + 1		3 + 12	
	− 1 + 4		13	

$\therefore \text{hcf}=1,\ f(x),\ g(x)$ 互質。

13、設有兩同次多項式的領導係數都是 1，其最高公因式爲 $x-2$，最低公倍式爲 $x^3-6x^2+11x-6$，求此兩多項式。

答案：

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -6 & +11 & -6 & 2 \\ & & 2 & -8+6 & \\ \hline 1 & -4 & +3 & \boxed{+0} & \end{array}$$

$\therefore x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$

故此兩多項式爲$(x-2)(x-1)=x^2-3x+2$ 。

$(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$ 。