高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.12.27					
範圍	4-1,2 多項式、餘式因式定理+Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 選擇題 (每題 10 分)

1、(A) 若多項式 $f(x)$ 除以 x^2-5x-6 得餘式 $2x-3$,則下列何者恆成立？ (A) $f(-1)=-5$ (B) $f(1)=-1$ (C) $f(2)=1$ (D) $f(3)=3$ (E) $f(6)=8$

解析： $f(x)=(x-6)(x+1)Q(x)+2x-3$ ，$\therefore f(-1)=-5,\ f(6)=9$ 可確定

2、(B) 若 x^4+ax^2+bx+c 除以 $(x+1)(x+2)(x-3)$ 的餘式為 x^2-x+5 ，求 $a+b+c=$？

(A) 8 (B) -8 (C) 4 (D) -4 (E) 0

解析：$\because \begin{cases} f(-1)=7=1+a-b+c \\ f(-2)=11=16+4a-2b+c \\ f(3)=11=81+9a+3b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=-7 \\ c=5 \end{cases}$

$\therefore a+b+c=-6-7+5=-8$。

3、(E) 若 $f(x)=x^3-2x^2-x+5$，則多項式 $g(x)=f(f(x))$ 除以 $(x-2)$ 所得的餘式為

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 11

解析：由餘式定理知 $g(x)$ 除以 $(x-2)$ 所得之餘式為 $g(2)$ ，

$g(2)=f(f(2))=f(2^3-2\cdot 2^2-2+5)=f(3)=3^3-2\cdot 3^2-3+5=11$

則 $g(x)$ 除以 $(x-2)$ 所得之餘式為 11。

二. 填充題 (每題 10 分)

4、 $f(x)=3x^{123}-7x^{12}+5x^2-8$ 則 $x+1$ 除 $f(x)$ 的餘式為________ 。

答案： -13

解析： $f(-1)=-3-7+5-8=-13$

5、設 $f(x)=x^3-5x^2-kx+9$ 可被 $x-3$ 整除，則 $k=$______，又 $f(x)=0$ 之根為______。

答案： -3; $3, 3, -1$

解析： $f(3)=0$ $\quad \therefore 27-45-3k+9=0 \quad \therefore k=-3$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -5 & +3 & +9 & 3 \\ & +3 & -6 & -9 & \\ \hline 1 & -2 & -3 & +0 & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-3)(x-3)(x+1)$ ，$\therefore f(x)=0$ 之三根為 $3, 3, -1$

6、若 $5x^5-5x^4+7x^3-4x^2+4x-2=(ax^2+bx+c)(5x^3+2x-1)+(dx^2+ex+f)$ ，則 $a+b+c+d+e+f=$_____。

答案：0

解析：利用除法原理

$$
\begin{array}{r}
1-1+1 \\
5+0+2-1\overline{\big)\,5-5+7-4+4-2} \\
\underline{5+0+2-1} \\
-5+5-3+4 \\
\underline{-5+0-2+1} \\
5-1+3-2 \\
\underline{5+0+2-1} \\
-1+1-1
\end{array}
$$

$\therefore ax^2+bx+c=x^2-x+1$, $dx^2+ex+f=-x^2+x-1$

故 $a+b+c+d+e+f=1-1+1-1+1-1=0$ 。

7、多項式 $f(x)$ 除以 $x-3$ 得餘式 16，除以 $x+4$ 得餘式-19，則 $f(x)$ 除以 $(x-3)(x+4)$ 所得的餘式爲__________ 。

答案：$5x+1$

解析：設 $f(x)=(x-3)(x+4)Q(x)+(ax+b)$

$\therefore\begin{cases} f(-4)=-19=-4a+b \\ f(3)=16=3a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}$，$\therefore$餘式$=5x+1$ 。

8、設多項式 $ax(x+1)+b(x+1)(x+2)+cx(x+2)$ 經化簡後得 x^2+2 則 $a=$______, $b=$______, $c=$______ 。

答案：3, 1, -3

解析：$\because ax(x+1)+b(x+1)(x+2)+cx(x+2)=x^2+2$

令 $x=0,\ 2b=2,\ b=1$

令 $x=-1,\ -c=3,\ c=-3$

令 $x=-2,\ 2a=6,\ a=3$

9、設 $f(x)=x^3-4x^2+7x-1=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$ ，則

(1) $(a,b,c,d)=$_____________ 。(2)求 $f(1.99)$ 的近似值至二位小數____________ 。

答案：(1) $(1,2,3,5)$　　(2) 4.97

解析：(1)

$$
\begin{array}{l}
\begin{array}{r|l}
1-4+7-1 & 2 \\
+2-4+6 & \\ \hline
1-2+3 & +5\cdots\cdots d \\
+2+0 & \\ \hline
1+0 & +3\cdots\cdots c \\
+2 & \\ \hline
\end{array} \\
a\cdots\cdots 1+2\cdots\cdots b
\end{array}
$$

$\therefore f(x)=(x-2)^3+2(x-2)^2+3(x-2)+5$ ，$(a,b,c,d)=(1,2,3,5)$ 。

(2) $f(1.99)=(-0.01)^3+2(-0.01)^2+3(-0.01)+5 \fallingdotseq 4.97$ 。

10、若多項式 $f(x)$ 除以 x^2-x-2 的餘式爲 $2x+3$，多項式 $g(x)$ 除以 x^2-5x-6 的餘式爲 $x-5$，則(1)以 $x+1$ 除 $f(x)$ 的餘式爲_________ 。

(2)以 $x+1$ 除 $(x+3)f(x)-xg(x)$ 的餘式爲________ 。

答案：(1) 1　(2) -4

解析：(1) $f(x)=(x-2)(x+1)Q_1(x)+2x+3$，$\therefore f(-1)=1$　$\therefore$ $f(x)$除以 $x+1$ 的餘式爲 1

(2) $g(x)=(x-6)(x+1)Q_2(x)+x-5$　$\therefore g(-1)=-6$

$\therefore [(x+3)f(x)-xg(x)]$ 除以 $x+1$ 的餘式爲 $(-1+3)f(-1)-(-1)g(-1)=2+(-6)=-4$

11、求 $11^5-4\cdot 11^4-73\cdot 11^3-50\cdot 11^2+70\cdot 11+6$ 之值爲______。

答案：50

解析：令 $f(x)=x^5-4x^4-73x^3-50x^2+70x+6$

$\therefore$原式$=f(11)=f(x)$ 除以 $x-11$ 的餘式 $=50$

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & -4 & -73 & -50 & +70 & +6 & 11 \\ & +11 & +77 & +44 & -66 & +44 & \\ \hline 1 & +7 & +4 & -6 & +4 & +50 & \end{array}$$

12、多項式 $f(x)$ 以 x^2-3x+2 除之餘式爲 $5x+6$，以 x^2+x-20 除之餘式爲 $x-2$，且 $\deg f(x)\ge 4$，則 $f(x)$ 除以 x^2+4x-5 的餘式爲________ 。

答案：$3x+8$

解析：$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+5x+6$　$\therefore f(1)=11$

$f(x)=(x+5)(x-4)Q(x)+x-2$　$\therefore f(-5)=-7$

$f(x)=(x+5)(x-1)Q(x)+ax+b$

$\therefore \begin{cases} a+b=11 \\ -5a+b=-7 \end{cases}$　$\Rightarrow a=3,\ b=8$, 故餘式爲 $3x+8$。

13、$f(x)=x^5-3x^4-7x^3-17x^2-880x-220$,則 $f(7)=$______。

答案：-10

解析：

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & -3 & -7 & -17 & -880 & -220 & 7 \\ & +7 & +28 & +147 & +910 & +210 & \\ \hline 1 & +4 & +21 & +130 & +30 & -10 & \end{array}$$

$\therefore f(7)=-10$

14、$f(x)=x^3+2x^2+ax-7$ 以 $x-2$ 與 $x+3$ 分別除之其餘數相同，則 $a=$______，又其餘數爲________ 。

答案：-5, -1

解析：$\because f(2)=f(-3)$　$\therefore 8+8+2a-7=-27+18-3a-7$, $\therefore a=-5$　，又餘數爲 $f(2)=-1$

15、$f(x)=4x^4-12x^3+13x-5$ 則 $f(x)$ 除以 (x^2-3x+1) 之餘式爲____，又 $\left[f(x)\right]^3$ 除以 (x^2-3x+1) 的餘式爲____。

答案：$x-1$, $2x-1$

解析：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4+0-4 \\
1-3+1 & 4+12+0+13-5 \\
 & 4-12+4 \\ \hline
 & \quad -4+13-5 \\
 & \quad -4+12-4 \\ \hline
 & \qquad +1-1
\end{array}
$$

餘式 $x-1$

$(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
1-3+1 & 1-3+3-1 \\
 & 1-3+1 \\ \hline
 & \quad +2-1
\end{array}
$$

餘式$2x-1$

16、 $f(x)=x^3-2x^2+4x-1, g(x)=f(2x+3)$ 則以 $2x+1$ 除 $g(x)$ 的餘式爲________ 。

$\boxed{答案}$：7

$\boxed{解析}$： $g(-\frac{1}{2})=f(2)=8-8+8-1=7$

17、設 $f(x)$ 爲四次多項式，若 $f(x)$ 除以$(x-2)^3$得餘式 $4x-5$，$f(x)$ 除以$x+1$ 得餘式 18，$f(x)$ 除以$x+2$ 得餘式 179，則$f(2)$=________ ，又$f(1)$=________。

$\boxed{答案}$：3, -4

$\boxed{解析}$：$\because$ $f(-1)=18$　$f(-2)=179$　設 $f(x)=(x-2)^3\cdot(ax+b)+4x-5$　$\therefore$ $f(2)=3$

$\therefore \begin{cases} 18=-27(-a+b)-9 \\ 179=-64(-2a+b)-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ 2a-b=3 \end{cases}$ $\therefore a=2$，$b=1$， $f(1)=(-1)(3)+4-5=-4$

18、 $a,\ b\in\mathbb{R},\ 3x^3-5x^2+ax+b$ 可被 $(x+1)(x-3)$ 整除，則 $a=$______ ,$b=$______。

$\boxed{答案}$：$-11, -3$

$\boxed{解析}$：$\begin{cases} -3-5-a+b=0 \\ 81-45+3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-11, b=-3$

19、 $f(x)$ 爲一多項式，a, b 爲實數，且 $a\neq 0$ ，若以 $(ax-b)$ 除 $f(x)$ 所得之商爲 $q(x)$ ，餘式爲 r，則以 $(x-b)$ 除 $x\cdot f(\frac{x}{a})$ 之商式爲____________，餘式爲__________。

$\boxed{答案}$： $xq(\frac{x}{a})+r,\ br$

$\boxed{解析}$： $f(x)=(ax-b)\cdot q(x)+r$

$f(\frac{x}{a})=(x-b)\cdot q(\frac{x}{a})+r$

$x\cdot f(\frac{x}{a})=x(x-b)\cdot q(\frac{x}{a})+rx$

$=(x-b)\left[xq(\frac{x}{a})+r\right]+br$　$(\because rx\div(x-b)=r\cdots\cdots br)$

故商式 $xq(\frac{x}{a})+r$ ，餘式 br。

20、設 $f(x)=3x^4-17x^3+28x^2-11x+3$ 則 $f(3)=$______，又 $f(\frac{4+\sqrt{13}}{3})=$______。

答案：6, 2

解析：

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & -17 & +28 & -11 & +3 & 3 \\ & +9 & -24 & +12 & +3 & \\ \hline 3 & -8 & +4 & +1 & +6 & \end{array}$$

$\therefore f(3)=6$

令 $x=\frac{4+\sqrt{13}}{3}$, $\therefore (3x-4)^2=13$, $\therefore 3x^2-8x+1=0$

$f(x)=3x^4-17x^3+28x^2-11x+3=(3x^2-8x+1)(x^2-3x+1)+2$

$\therefore f(\frac{4+\sqrt{13}}{3})=0+2=2$

21、設 $f(x)$ 爲一多項式，若 $(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式爲 $5x+3$，則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式爲________。

答案：$2x+5$

解析：設 $f(x)=(x^2+x+1)\cdot q(x)+(ax+b)$, $a,b\in\mathbb{R}$

$\therefore (x+1)f(x)=(x+1)(x^2+x+1)\cdot q(x)+(x+1)(ax+b)$

$=(x+1)(x^2+x+1)\cdot q(x)+a(x^2+x+1)+bx+(b-a)$

$\therefore b=5$ ，$b-a=3\Rightarrow a=2$ ，故餘式爲 $2x+5$ 。

22、設多項式 $f(x)$ 被 x^2-1 除後的餘式爲 $3x+4$，並且已知 $f(x)$ 有因式 x，若 $f(x)$ 被 $x(x^2-1)$ 除後的餘式爲 px^2+qx+r ，則 $(p,q,r)=$________。

答案：$(4,3,0)$

解析：設 $f(x)=x(x^2-1)\cdot q(x)+a(x^2-1)+3x+4$ ，$f(0)=-a+4=0\Rightarrow a=4$

$\therefore$ 餘式 $=4x^2+3x=px^2+qx+r$ ，故 $(p,q,r)=(4,3,0)$ 。

23、多項式 $f(x)$ 的各項係數和爲 11，且 $f(x)$ 除以 $x+2$ 得商式 $q(x)$, 餘式爲 5，則 $q(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式爲________ 。

答案：2

解析：$f(1)=11$ $f(x)=(x+2)q(x)+5$ ，$\therefore f(1)=3q(1)+5$, $\therefore q(1)=2$

24、$f(x)$ 爲三次多項式，以 x^2-1 除 $f(x)$ 餘 $-5x+4$ ，以 x^2-4 除 $f(x)$ 餘 $x+4$ 求 $f(x)=$____

答案：$\because f(x)=(x^2-1)Q_1(x)+(-5x+4)$ $\therefore f(1)=-1$ $f(-1)=9$

$f(x)=(x^2-4)Q_2(x)+x+4$ $\therefore f(2)=6$ $f(-2)=2$

設 $f(x)=a(x+1)(x^2-4)+b(x^2-4)+x+4$

$\because f(-1)=9=-3b+3$ $\therefore b=-2$

$\therefore f(1)=-1=-6a+6+5$ $\therefore a=2$

$\therefore\ f(x)=2(x+1)(x^2-4)-2(x^2-4)+x+4=2x^3-7x+4$

25、多項式 $f(x)$ 除以 $x+1$ 得餘式 8， $f(x)$ 除以 x^2-3x+1 得餘式 $x-1$，則 $f(x)$ 除以 $(x+1)(x^2-3x+1)$ 的餘式為何？________________

答案：設 $f(x)=(x+1)(x^2-3x+1)Q(x)+a(x^2-3x+1)+x-1$

$\because\ f(-1)=8=5a-2\quad \therefore a=2$，餘式為 $2(x^2-3x+1)+x-1=2x^2-5x+1$

26、設 $f(x)=x^3-x^2+kx-12$ 可被 $x-3$ 整除，

(1)試求 k 之值____________，(2)解方程式 $f(x)=0$。______________

答案：觀察 $f(x)\Rightarrow f(x)=x^3-x^2+kx-12=(x-3)(x^2+2x+4)$

得 $k=1\times4-3\times2=-2,\quad f(x)=0$ 之解為 $x=3,\ -1\pm\sqrt{3}i$。

27、以 $(x-a)$ 去除 $f(x)$ 得餘數 α，以 $(x-b)$ 去除 $f(x)$ 得餘數 β，試求以 $(x-a)(x-b)$ 去除 $f(x)$ 的餘式，其中 $a\neq b$。

答案：設 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 之商式為 $q(x)$，餘式為 $m(x-a)+\alpha$

則 $f(x)=(x-a)(x-b)q(x)+m(x-a)+\alpha$

由已知 $f(b)=0+m(b-a)+\alpha=\beta\Rightarrow m=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}=\dfrac{\alpha-\beta}{a-b}$

故所求之餘式為 $\dfrac{\alpha-\beta}{a-b}(x-a)+\alpha=\dfrac{\alpha-\beta}{a-b}x+\dfrac{a\beta-b\alpha}{a-b}$