高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.12.20					
範圍	歸納法、多項式+Ans	班級		姓名	
		座號			

1、(D) 下列何者爲 x 的多項式？ (A) $2x+\pi=0$ (B) $x^2+\frac{1}{3}|x|+2$ (C) $\sqrt{x+4}$

(D) $\frac{x^2}{a}+\sqrt{3}x+5$ (E) $\frac{2}{x+1}+3x^2+4$

解析：x 的多項式，x 不得在分母、根號與絕對值中，故正確答案爲(D)。

2、(E) 設將 $a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)$ 展開合併得 x^2+x+2 ，則 $a-b+c=$？ (A) 7 (B) 2 (C) 8 (D) –2 (E) –3

解析：$\because a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-1)(x-3)=x^2+x+2$

$\therefore x=1$ 代入得 $2b=4$ ，$\therefore b=2$

$x=2$ 代入得 $-c=8$ ，$\therefore c=-8 \Rightarrow a-b+c=7-2+(-8)=-3$

$x=3$ 代入得 $2a=14$ ，$\therefore a=7$ ，故答案爲(E)。

二. 填充題 (每題 10 分)

1、遞迴數列 $<a_n>$ ，$a_1=1$ 且 $a_{n+1}=a_n\cdot(\frac{1}{4})^n$ ，則 $a_3=$________，a_n 的通式爲_______ 。

答案：$\frac{1}{64},(\frac{1}{4})^{\frac{n(n-1)}{2}}$

解析：

$a_1=1$

$a_2=a_1(\frac{1}{4})^1,$

$a_3=a_2(\frac{1}{4})^2,$

$a_4=a_3(\frac{1}{4})^3,$

$\vdots \quad \vdots$

$a_n=a_{n-1}(\frac{1}{4})^{n-1},$

全部相乘

$a_n=1\cdot(\frac{1}{4})^1(\frac{1}{4})^2\cdots(\frac{1}{4})^{n-2}\cdot(\frac{1}{4})^{n-1}$

$=1\cdot(\frac{1}{4})^{1+2+3+\cdots+(n-1)}=(\frac{1}{4})^{\frac{n(n-1)}{2}}$

(1) $a_3=(\frac{1}{4})^{\frac{3(3-1)}{2}}=\frac{1}{64}$ ，(2) $a_n=(\frac{1}{4})^{\frac{n(n-1)}{2}}$

2、求 $\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{100\times103}=$_______ 。

答案：$\frac{34}{103}$

$\boxed{解析}$：原式$=\frac{1}{3}[\frac{3}{1\times4}+\frac{3}{4\times7}+\frac{3}{7\times10}+\cdots+\frac{3}{100\times103}]$

$$=\frac{1}{3}[(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{4}})+(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}})+(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{10}})+\cdots+(\cancel{\frac{1}{100}}-\frac{1}{103})]$$

$$=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{103})=\frac{1}{3}\times\frac{102}{103}=\frac{34}{103}$$ 。

3、設數列$\langle c_n\rangle$的遞迴定義為$\begin{cases}a_1=1\\ a_{n+1}=a_n+n\end{cases}$，則$a_{20}=$________。

$\boxed{答案}$：191

$\boxed{解析}$：

$$\begin{aligned}a_{20}&=\cancel{a_{19}}+19\\ \cancel{a_{19}}&=\cancel{a_{18}}+18\\ &\vdots\\ \cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+2\\ +)\ \cancel{a_2}&=a_1+1\end{aligned}$$

$$a_{20}=a_1+(1+\cdots+19)=1+\frac{19\cdot20}{2}=191$$ 。

4、有一數列依照規則排列如下 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, $\cdots,\underbrace{n,\ n,\cdots,\ n}_{(n+1個)}\cdots$ 則$a_{150}=$ _______，又前 150 項之和$S_{150}=$ _______ 。

$\boxed{答案}$：16, 1600

$\boxed{解析}$：

因 $[2+3+\cdots+(\ell+1)]<150$，則 ℓ 之最大值為 15

$2+3+\cdots+16=135$ 則$a_{150}=16$

$$S_{150}=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots\cdots+15\times16+16\times15$$

$$=\sum_{k=1}^{15}k(k+1)+16\times15=\frac{1}{3}\times15\times16\times17+16\times15=1600$$

5、設$f(x)=(x^4+x^3+x^2-3)^{11}$，其展開式中求

(1)各項係數總和為_______。(2)偶次項的係數總和為__________。

$\boxed{答案}$：(1)0　　(2)-1024

$\boxed{解析}$：$\because f(x)=(x^4+x^3+x^2-3)^{11}$

$\therefore f(1)=(1+1+1-3)^{11}=0$, $f(-1)=(1-1+1-3)^{11}=-2^{11}$

(1)各項係數總和$=f(1)=0$ 。

(2)偶次項的係數總和$=\frac{f(1)+f(-1)}{2}=\frac{-2^{11}}{2}=-2^{10}=-1024$ 。

6、有一多項式$f(x)$，除以(x^2-x+1)之商為$2x^2-x+5$，餘式為$6x-3$則此多項式為_______。

$\boxed{答案}$：$2x^4-3x^3+8x^2+2$

$\boxed{解析}$：除法原理：$f(x)=(x^2-x+1)(2x^2-x+5)+6x-3=2x^4-3x^3+8x^2+2$

7、求$f(x)=2x^4+3x^3-5x^2-4x+7$除以$2x-3$的商式為____________________，餘式為

________。

答案：$x^3+3x^2+2x+1;\ 10$

解析：利用綜合除法

$$\begin{array}{r|l} 2+3-5-4+7 & 3 \\ +3+9+6+3 & \overline{2} \\ \hline 2\,|\,2+6+4+2\,|+10 & \\ 1+3+2+1 & \end{array}$$

∴商式為 x^3+3x^2+2x+1，餘式為 10。

8、設 $f(x)$ 為 x 的三次多項式， $g(x)$ 為 x 的四次多項式

則(1) $f(x^2)$ 是 x 的____次多項式　　(2) $f(x)\cdot g(x)$ 是 x 的____次多項式

(3) $f(x)-g(x)$ 是 x 的____次多項式。

答案：6, 7, 4

9、設 $f(x)=(ax^5-x^4+x^2-x+2)+(bx^4-2x+1)$ 為 x 的二次多項式則 $f(x)=$____，又 $b=$____。

答案：$x^2-3x+3,\ 1$

解析：$f(x)=ax^5+(b-1)x^4+x^2-3x+3$ 為 x 的二次多項式 $\Rightarrow a=0,\ b=1$ 則 $f(x)=x^2-3x+3$

10、設 $f(x)=x^6+2x^5+4x^3+3x^2+x-1,\ g(x)=2x^4-3x^3-2x^2+7$ ，求 $f(x)\cdot g(x)$ 中 x^6 之係數為________。

答案：1

解析：$f(x)\cdot g(x)=(x^6+2x^5+4x^3+3x^2+x-1)(2x^4-3x^3-2x^2+7)$

∴ x^6 項係數$=1\times 7+4\times(-3)+3\times 2=1$ 。

11、若多項式 x^3+4x^2+5x-3 除以 $f(x)$ 的商式為 $x+2$，餘式為 $2x-1$，則 $f(x)=$__________。

答案：x^2+2x-1

解析：

$\because x^3+4x^2+5x-3=f(x)\cdot(x+2)+(2x-1)$

$\therefore f(x)\cdot(x+2)=x^3+4x^2+3x-2$

$f(x)=\dfrac{x^3+4x^2+3x-2}{x+2}=x^2+2x-1$

$$\begin{array}{r|l} 1+4+3-2 & \\ -2-4+2 & -2 \\ \hline 1+2-1\,|+0 & \end{array}$$

12、若有一多項式 $f(x)$ 以 $ax-b$ 除之，得商式為 $q(x)$ ，餘式為 r，試問

(1) $f(x)$ 被 $x-\dfrac{b}{a}$ 除之所得之商式為________。

(2) $x\cdot f(x)$ 被 $x-\dfrac{b}{a}$ 除之所得之餘式為______。

答案：(1) $aq(x)$　　(2) $\dfrac{br}{a}$

解析：(1) $f(x)=(ax-b)\cdot q(x)+r=(x-\dfrac{b}{a})\cdot aq(x)+r$ ，∴商式為 $aq(x)$ 。

(2) $x\cdot f(x)=(x-\frac{b}{a})\cdot aq(x)\cdot x+rx$

$=(x-\frac{b}{a})\cdot aq(x)\cdot x+(x-\frac{b}{a})\cdot r+\frac{br}{a}$

$$\begin{array}{r|l} & r \\ \hline x-\frac{b}{a} & rx \\ & rx-\frac{br}{a} \\ \hline & \frac{br}{a} \end{array}$$

$\therefore$餘式爲$\frac{br}{a}$ 。

13、設 $f(x)=2x^4-x+11,\ g(x)=x^3+2x^2-1$則$2f(x)-3g(x)=$___ ， $f(x)\cdot g(x)=$___ 。

$\boxed{\text{答案}}$：$4x^4-3x^3-6x^2-2x+25$， $2x^7+4x^6-3x^4+9x^3+22x^2+x-11$

14、 設 $f(x)=(x^{37}-4x^{23}+4x^{15}-3x^2-1)(x^7-2x^6+5x^3-x+2)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{44}x^{44}$ ，

則(1) $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{44}=$________ 。(2) $a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{43}=$________ 。

$\boxed{\text{答案}}$：$-15,-20$

$\boxed{\text{解析}}$：$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{44}=f(1)=(-3)\times(5)=-15$

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{43}=\frac{f(1)-f(-1)}{2}=\frac{(-15)-25}{2}=-20$

15、若x^2+nx+1整除x^3+3x^2+mx+2時，則$m=$______, $n=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：3, 1

$\boxed{\text{解析}}$：$\therefore 3-n-2=0, n=1$ ， $m-1-2n=0, \therefore m=3$

$$\begin{array}{r|llll} & 1 & +2 & & \\ \hline 1+n+1 & 1 & +3 & +m & +2 \\ & 1 & +n & +1 & \\ \hline & & +(3-n) & +(m-1) & +2 \\ & & 2 & +2n & +2 \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

16、設 $f(x)=x^4-3x^3+2x^2-5x+7$ ， $f(x)$除以x^2-2x-1之商式爲______，餘式爲______，

又 $f(1+\sqrt{2})=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：$x^2-x+1,\ -4x+8,\ 4-4\sqrt{2}$

$\boxed{\text{解析}}$：

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -3 & +2 & -5 & +7 & \\ & +2 & -2 & +2 & & +2 \\ & & +1 & -1 & +1 & +1 \\ \hline 1 & -1 & +1 & -4 & +8 & \end{array}$$

$Q(x)$ $R(x)$

商式 $Q(x)=x^2-x+1$ ，餘式 $R(x)=-4x+8$

若 $x=1+\sqrt{2}\Rightarrow x^2-2x-1=0\Rightarrow f(1+\sqrt{2})=-4(1+\sqrt{2})+8=4-4\sqrt{2}$

17、設 $f(x)=a(2x^2+3x)+b(2x-x^2)+(-5x^2-11x+c-2)$ 爲零多項式，求$(a,b,c)=$________。

$\boxed{\text{答案}}$：$(3,1,2)$

$\boxed{解析}$：$f(x)=(2a-b-5)x^2+(3a+2b-11)x+(c-2)$ 爲零多項式

$$\therefore \begin{cases} 2a-b-5=0 \\ 3a+2b-11=0 \\ c-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases},\ \therefore (a,b,c)=(3,1,2)\text{ 。}$$

三. 證明題 (每題 10 分)

1、試證平方數列的首 n 項和爲$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。

$\boxed{答案}$：(1)在$n=1$時，左式$=1^2=1$，右式$=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$，故成立。

(2)設$n=k$時成立：$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ 。

當$n=k+1$時，$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{(k+1)}{6}[k(2k+1)+6(k+1)]$$

$$=\frac{(k+1)}{6}[2k^2+7k+6]$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$ 也成立。

由(1)與(2)，根據數學歸納法，知此命題對一切自然數 n 都成立。

2、設$n\in\mathbb{N}$，試證$10^{n+1}-9n-10$ 恆爲 81 之倍數。

$\boxed{答案}$：(1)當$n=1$時，$10^2-9-10=81$爲 81 之倍數，$\therefore$成立。

(2)設$n=k$時成立，$10^{k+1}-9k-10=81m\ \ (m\in\mathbb{N})$

則$n=k+1$時，$10^{k+1+1}-9(k+1)-10$

$10^{k+2}-9k-19$

$=10\cdot(10^{k+1}-9k-10)+81k+81$

$=10\cdot 81m+81k+81$

$=81(10m+k+1)$ 爲 81 之倍數，$\therefore$成立。

$\therefore$根據數學歸納法，$\forall n\in\mathbb{N}$，原式恆成立。