高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.12.13					
範圍	3-3 歸納法+Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 填充題 (每題 10 分)

1、遞迴數列< a_n >， $a_1=1$ 且 $a_{n+1}=a_n\cdot(\frac{1}{3})^n$ ，則 $a_3=$________，a_n的通式爲_______。

答案：$\frac{1}{27},(\frac{1}{3})^{\frac{n(n-1)}{2}}$

解析：

$a_1=1$

$a_2=a_1(\frac{1}{3})^1,$

$a_3=a_2(\frac{1}{3})^2,$

$a_4=a_3(\frac{1}{3})^3,$

$\vdots \quad \vdots$

$a_n=a_{n-1}(\frac{1}{3})^{n-1},$

全部相乘

$a_n=1\cdot(\frac{1}{3})^1(\frac{1}{3})^2\cdots(\frac{1}{3})^{n-2}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}$

$=1\cdot(\frac{1}{3})^{1+2+3+\cdots+(n-1)}=(\frac{1}{3})^{\frac{n(n-1)}{2}}$

(1) $a_3=(\frac{1}{3})^{\frac{3(3-1)}{2}}=\frac{1}{27}$ ，(2) $a_n=(\frac{1}{3})^{\frac{n(n-1)}{2}}$

2、求$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{99\times101}=$_______。

答案：$\frac{50}{101}$

解析：原式$=\frac{1}{2}[\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{3\times5}+\frac{2}{5\times7}+\cdots+\frac{2}{99\times101}]$

$=\frac{1}{2}[(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}})+(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}})+(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}})+\cdots+(\cancel{\frac{1}{99}}-\frac{1}{101})]$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{101})=\frac{1}{2}\times\frac{100}{101}=\frac{50}{101}$ 。

3、設 $4a_n=a_{n-1}+4$ ，且$a_1=1$，(1)試求$a_4=$_______，(2)寫出a_n的通式爲_______。

答案：(1)$\frac{85}{64}$(2)$\frac{4}{3}[1-(\frac{1}{4})^n]$

解析： $4a_n=a_{n-1}+4\Rightarrow4(a_n-\frac{4}{3})=a_{n-1}-\frac{4}{3}$ (Why? 想一想)

$$4(a_n-\frac{4}{3})=a_{n-1}-\frac{4}{3}$$
$$4(a_{n-1}-\frac{4}{3})=a_{n-2}-\frac{4}{3}$$
$$\vdots$$
$$4(a_3-\frac{4}{3})=a_2-\frac{4}{3}$$
$$\times)\ 4(a_2-\frac{4}{3})=a_1-\frac{4}{3}$$
$$4^{n-1}(a_n-\frac{4}{3})=a_1-\frac{4}{3}$$
$$(a_n-\frac{4}{3})=\frac{1}{4^{n-1}}(1-\frac{4}{3}) \Rightarrow a_n=\frac{4}{3}[1-(\frac{1}{4})^n]$$
$$(1)\ a_4=\frac{4}{3}[1-(\frac{1}{4})^4]=\frac{85}{64}\text{，}(2)\ a_n=\frac{4}{3}[1-(\frac{1}{4})^n]$$

4、設數列 $< c_n >$ 的遞迴定義為 $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=a_n+2n \end{cases}$，則 $a_{20}=$________。

$\boxed{答案}$：381

$\boxed{解析}$：
$$a_{20}=\cancel{a_{19}}+2\times 19$$
$$\cancel{a_{19}}=\cancel{a_{18}}+2\times 18$$
$$\vdots$$
$$\cancel{a_3}=\cancel{a_2}+2\times 2$$
$$+)\ \cancel{a_2}=a_1+2\times 1$$
$$a_{20}=a_1+2(1+\cdots+19)=1+2\cdot\frac{19\cdot 20}{2}=381\text{。}$$

5、有一數列依照規則排列如下 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, $\cdots,\underbrace{n,\ n,\cdots,\ n\cdots}_{(n+1\text{個})}$ 則 $a_{160}=$______，又前 160 項之和 $S_{160}=$______。

$\boxed{答案}$：17, 1768

$\boxed{解析}$：1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, $\cdots,\underbrace{\ell,\ \ell,\cdots,\ \cdots,\ell}_{(\ell+1\text{個})}$

因 $[2+3+\cdots+(\ell+1)]<160$，則 ℓ 之最大值為 16

$2+3+\cdots+17=152$ 則 $a_{160}=17$

$$S_{160}=1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots\cdots+16\times 17+17\times 8$$
$$=\sum_{k=1}^{16}k(k+1)+17\times 8=\frac{1}{3}\times 16\times 17\times 18+17\times 8=1768$$

6、遞迴數列 $< a_n >$，已知 $a_1=1$，且 $a_n=a_{n-1}+(n-1)$，則(1) $a_5=$______，(2) a_n 的通式為______，(3) $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=$______。

答案：(1)11(2)$\dfrac{n^2-n+2}{2}$(3)$\dfrac{n}{6}(n^2+5)$

解析：(1) $a_5=a_4+4=a_3+3+4=\cdots=a_1+1+2+3+4=11$

(2) $a_1=1$

$a_2=a_1+1,$

$a_3=a_2+2,$

$a_4=a_3+3,$

$\vdots \quad \vdots$

$a_n=a_{n-1}+(n-1),$

全部相加

$a_n=1+[1+2+3+\cdots+(n-1)]=1+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n^2-n+2}{2}$

(3)$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k^2-k+2}{2}=\dfrac{1}{2}[\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2]$

$=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{n(n+1)}{2}+2n\right]=\dfrac{n}{12}(2n^2+10)=\dfrac{n}{6}(n^2+5)$

二. 證明題 (每題 10 分)

1、設$n\in\mathbb{N}$，試證$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$。

答案：(1)當$n=1$時，左式$=1$，右式$=(2\times1-1)^2=1$，$\therefore$左式=右式，故成立

(2)設$n=k$時成立，$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

當$n=k+1$時，$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$

$=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$，故成立。

$\therefore$根據數學歸納法，$\forall n\in\mathbb{N}$，原式恆成立。

2、設p爲一正質數，$n\in\mathbb{N},\ f(n)=3^{2n+1}+2^{n+2}$

(1) $\forall n\in\mathbb{N}$，使得$p\,|\,f(n)$，則$p=$________。

(2)試證明你的推論是正確的。

答案：(1)當$n=1$時，$p\,|\,f(1)=35=5\times7$

當$n=2$時，$p\,|\,f(2)=259=7\times37$

$\therefore$取質數$p=7$。

(2)①當$n=1$時，$f(1)=35$爲 7 的倍數

②設$n=k$時成立，$\therefore\ f(k)=3^{2k+1}+2^{k+2}=7m, m\in\mathbb{N}$

當$n=k+1$時，左式$=f(k+1)=3^{2k+3}+2^{k+3}$

$=3^{(2k+1)+2}+2^{(k+2)+1}$

$=3^{2k+1}\cdot3^2+2^{k+2}\cdot2$

$=9(3^{2k+1}+2^{k+2})-7\cdot2^{k+2}$

$=9\cdot7m-7\cdot2^{k+2}$

$=7(9m-2^{k+2})$爲 7 的倍數，故成立。

$\therefore$根據數學歸納法，$\forall n\in\mathbb{N},7\,|\,f(n)=3^{2n+1}+2^{n+2}$。

3、試證平方數列的首n項和爲

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

$\boxed{\text{答案}}$：(1)在 $n=1$ 時，左式 $=1^2=1$，右式 $=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$，故成立。

(2)設 $n=k$ 時成立：$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$。

當 $n=k+1$ 時，$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{(k+1)}{6}[k(2k+1)+6(k+1)]$$

$$=\frac{(k+1)}{6}[2k^2+7k+6]$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$ 也成立。

由(1)與(2)，根據數學歸納法，知此命題對一切自然數 n 都成立。

4、試證明對任何自然數 n，$5^{2n+2}+2^{3n-1}$ 恒爲 17 的倍數。

$\boxed{\text{答案}}$：(1)當 $n=1,\ 5^4+2^2=625+4=629=17\times 37$ 成立

(2)設 $n=k$ 時成立　$\therefore 5^{2k+2}+2^{3k-1}=17\times m,\ m\in\mathbb{N}$

當 $n=k+1$ 時，

$5^{2(k+1)+2}+2^{3(k+1)-1}=25\cdot 5^{2k+2}+8\cdot 2^{3k-1}$

$=25[5^{2k+2}+2^{3k-1}]-17\times 2^{3k-1}$

$=25\times 17m-17\times 5^{2k+2}=17\times(25m-5^{2k+2})$爲17的倍數

根據數學歸納法，$\forall n\in\mathbb{N}$，$5^{2n+2}+2^{3n-1}=17$的倍數恒成立。

5、設 $n\in\mathbb{N}$，試證 $10^{n+1}-9n-10$ 恆爲 81 之倍數。

$\boxed{\text{答案}}$：(1)當 $n=1$ 時，$10^2-9-10=81$ 爲 81 之倍數，$\therefore$成立。

(2)設 $n=k$ 時成立，$10^{k+1}-9k-10=81m\ \ (m\in\mathbb{N})$

則 $n=k+1$ 時，$10^{k+1+1}-9(k+1)-10$

$10^{k+1+1}-9k-19$

$=10\cdot(10^{k+1}-9k-10)+81k+81$

$=10\cdot 81m+81k+81$

$=81(10m+k+1)$ 爲 81 之倍數，$\therefore$成立。

$\therefore$根據數學歸納法，$\forall n\in\mathbb{N}$，原式恆成立。