高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.11.25					
範圍	3-1,2 數列、級數 +Ans	班級		姓名	
		座號			

一.選擇題 (每題 10 分)

1、(E) 等差級數$(-28)+(-25)+(-22)+\cdots+(29)$可表為 (A) $\sum_{k=1}^{19}(3k-1)$ (B) $\sum_{k=1}^{20}(3k-1)$

(C) $\sum_{k=-9}^{10}(3k-31)$ (D) $\sum_{k=1}^{19}(3k-31)$ (E) $\sum_{k=1}^{20}(32-3k)$

解析：此數列共$\dfrac{29-(-28)}{3}+1=20$項，$\therefore\sum_{k=1}^{20}(32-3k)=29+26+\cdots+(-28)$

2、(D) 試問有多少個正整數 n 使得$\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{10}{n}$為整數？

(A) 1 個 (B) 2 個 (C) 3 個 (D) 4 個 (E) 5 個

解析：$\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{10}{n}=\dfrac{1}{n}(1+2+\cdots+10)=\dfrac{55}{n}$

$\because n|55\in\mathbb{Z}$ 且 $n\in\mathbb{N}$，$\therefore n=1,5,11,55$ 即 n 有 4 個。故答案為(D)。

3、(B) 一等比數列，已知$a_4\cdot a_{12}=2^{16}$，則下列何者一定正確？

(A) $a_1=2$ (B) $a_8=2^8$ (C) $a_4\cdot a_5\cdot a_6=2^{15}$ (D) $a_7\cdot a_8=2^{15}$ (E) $a_{11}\cdot a_{12}\cdot a_{13}=2^{36}$

解析：$\because a_4\cdot a_{12}=2^{16}\therefore ar^3\cdot ar^{11}=2^{16}$

故$a^2r^{14}=2^{16}\Rightarrow ar^7=2^8\Rightarrow a_8=2^8$

4、(C) 一等差數列，已知$a_5+a_{17}=22$，則下列何者一定正確？

(A) $a_1=1$ (B) $a_5=5$ (C) $a_{11}=11$ (D) $a_{17}=17$ (E) $a_{22}=22$

解析：$a_5+a_{17}=22,\ \therefore 2a_1+20d=22\Rightarrow a_1+10d=11\Rightarrow a_{11}=11$

5、(D) 利用$1+11+111=123$判斷下列何者錯誤？ (A) $2+22=24$ (B) $7+77+777=861$

(C) $4+44+444+4444=4936$ (D) $5+55+555+5555+55555=61825$

(E) $6+66+666+6666+66666+666666=740736$

解析：$5+55+555+5555+55555=12345\times5=61725$

6、(BE) 下列各無窮級數中，何者為收斂？ (複選)

(A) $\sum_{k=1}^{\infty}(1.5)^k$ (B) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\pi}{7})^{k-1}$ (C) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{4^k}$ (D) $\sum_{k=1}^{\infty}3$ (E) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k+1}}{6^k}$

解析：無窮等比級數收斂之條件為$-1<$公比<1，$\dfrac{\pi}{7}\doteqdot0.45<1$ 故答案為(B)(E)。

7、(CE) 有一個 101 項的等差數列$a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{101}$，其和為 0 且$a_{71}=71$，試問下列選項那些為正確？(複選)

(A) $a_1+a_{101}>0$ (B) $a_2+a_{100}<0$ (C) $a_3+a_{99}=0$ (D) $a_{51}=51$ (E) $a_1<0$

解析：(A)(╳)：$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{101}=0$ $\because S_n=\dfrac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]\therefore S_{101}=\dfrac{101}{2}(2a_1+100d)=0$

$\Rightarrow 2a_1+100d=0\Rightarrow a_1+50d=0$， $a_1+a_{101}=a_1+a_1+100d=2a_1+100d=0$。

(B)（╳）：$a_2+a_{100}=(a_1+d)+(a_1+99d)=2a_1+100d=0$。

(C)（○）：$a_3+a_{99}=(a_1+2d)+(a_1+98d)=2a_1+100d=0$。

(D)（╳）：$a_{51}=a_1+50d=0$。

(E)（◯）：$\because a_{71}=a_1+70d=71\cdots\cdots$①　　又 $a_1+50d=0\cdots\cdots$②

①−②$\times\frac{7}{5}$　　$-\frac{2}{5}a_1=71$，$\therefore a_1<0$。故答案爲(C)(E)。

二. 填充題 (每題 10 分)

8、設 $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{-2x}{3(x+1)}$，則 $x=$______。

答案：$-\frac{1}{2}$

解析：$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ 收斂 $\Leftrightarrow -1<$ 公比 $=x<1$，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}=\frac{-2x}{3(x+1)}\Rightarrow 2x^2-5x-3=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 或 3（不合）。

9、求 0.7 + 0.077 + 0.00777 +⋯之和爲______。

答案：$\frac{7}{891}$

解析：$0.7+0.077+0.00777+\cdots$

$=\frac{7}{9}\times(0.9+0.099+0.00999+\cdots)$

$=\frac{7}{9}[(1-0.1)+(0.1-0.001)+(0.01-0.00001)+\cdots]$

$=\frac{7}{9}\left[\frac{1}{1-0.1}-\frac{0.1}{1-0.01}\right]=\frac{7}{9}\times(\frac{1}{9}-\frac{10}{99})=\frac{7}{891}$

10、設 $a_n=\frac{3^{n+1}}{(2x-1)^{n-1}}$ 則

(1)數列 $<a_n>$ 收斂時，x 的範圍爲________，(2) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂時，x 的範圍爲________。

答案：(1) $x\geq 2$ 或 $x<-1$　　(2) $x>2$ 或 $x<-1$

解析：數列收斂，$-1<\frac{3}{2x-1}\leq 1$, $\frac{3}{2x-1}=1$　$\therefore x=2$

$\left|\frac{3}{2x-1}\right|<1$　$\therefore |2x-1|>3$,　$2x-1>3$ 或 $2x-1<-3\Rightarrow x>2$ 或 $x<-1$

$\therefore x\geq 2$ 或 $x<-1$，級數收斂之條件爲 $-1<\frac{3}{2x-1}<1\Rightarrow x>2$ 或 $x<-1$

11、設無窮等比級數 $\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{100}+\cdots$ 的和爲 S，前 n 項之和爲 S_n

(1)試求此級數之和 $S=$______。(2)試求此等比級數前 n 項之和 $S_n=$____________。

(3)若 $|S-S_n|<\frac{1}{10^5}$，則 n 的最小值爲__________。

答案：(1) $\frac{5}{16}$　　(2) $\frac{5}{16}(1-(\frac{1}{5})^n)$　　(3) 7

$\boxed{解析}$：(1) $a=\dfrac{1}{4},\ r=\dfrac{1}{5}\quad \therefore S=\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{16}$

(2) $S_n=\dfrac{\frac{1}{4}\left[1-(\frac{1}{5})^n\right]}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{16}(1-(\dfrac{1}{5})^n)$

(3) $\left|S-S_n\right|=\dfrac{5}{16}(\dfrac{1}{5})^n<\dfrac{1}{10^5}\quad \therefore 5^n>\dfrac{5}{16}\times 10^5\quad \therefore 5^n>5^6\times 2\quad \therefore n=7$

12、有一個無窮等比級數，其和爲$\dfrac{3}{4}$，其各項平方和爲$\dfrac{3}{8}$，已知公比爲一有理數，則當公比以最簡分數表示時，其分母爲______。

$\boxed{答案}$：5

$\boxed{解析}$：令首項爲 a，公比爲 r

$\therefore \begin{cases}\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{3}{4}\cdots\cdots①\\ \dfrac{a^2}{1-r^2}=\dfrac{3}{8}\cdots\cdots②\end{cases}$，由$\dfrac{②}{①}$得$\dfrac{a}{1+r}=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots③$

由$\dfrac{③}{①}$得$\dfrac{1-r}{1+r}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow r=\dfrac{1}{5}$，$\therefore$分母爲 5。

13、求$\displaystyle\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=$________。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{15}{31}$

$\boxed{解析}$：$\displaystyle\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{29\times31}$

$=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{29}-\dfrac{1}{31})=\dfrac{15}{31}$。

14、一等比級數之公比爲r，設其前n項和爲S_n，已知$S_{10}=5,\ S_{20}=15$，則$S_{40}=$______，又$r^{10}=$______。

$\boxed{答案}$：75, 2

$\boxed{解析}$：$S_{10}=\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=5$

$S_{20}=\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}=15\quad \therefore \dfrac{r^{20}-1}{r^{10}-1}=3\quad \therefore r^{10}+1=3\quad \therefore r^{10}=2$

$\dfrac{a}{r-1}=5\quad \therefore S_{40}=\dfrac{a(r^{40}-1)}{r-1}=5\times(2^4-1)=75$

15、一等差數列，加到第 n 項之和$S_n=n^2+3n$，則 $a_{10}=$_______，又公差 $=$______。

$\boxed{答案}$：22, 2

$\boxed{解析}$：$\because S_n=n^2+3n,\ \therefore a_1=S_1=4$

$a_{10}=S_{10}-S_9=130-108=22\quad a_2=S_2-S_1=10-4=6, \therefore d=2$

16、一等差數列第四項是 25，第十項是 61，求第十五項爲______。

$\boxed{答案}$：91

$\boxed{解析}$：$d=\dfrac{61-25}{10-4}=\dfrac{36}{6}=6,a_{15}=a_{10}+5d=61+5\times6=91$。

18、一等比數列，首項爲 3，末項爲 192，和爲 $381+189\sqrt{2}$ ，則其公比爲______。

$\boxed{答案}$：$\sqrt{2}$

$\boxed{解析}$：$a=3,\ a_n=192$ ，$S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=\dfrac{r\cdot a_n-a}{r-1}$　　$381+189\sqrt{2}=\dfrac{192r-3}{r-1},\therefore r=\sqrt{2}$

19、一等差數列爲 47, 44, 41,$\cdots$，求其第 20 項爲______，又加到第 20 項的總和爲______。

$\boxed{答案}$：$-10,\ 370$

$\boxed{解析}$：$a=47,\ d=-3,\ \therefore a_{20}=47+19\times(-3)=-10,$

$$S_{20}=\frac{20}{2}[47\times2+19\times(-3)]=370$$

20、一等比數列$\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{16},\dfrac{1}{32},\cdots$求其第 20 項爲______，又加到第 20 項的總和爲______。

$\boxed{答案}$：$(\dfrac{1}{2})^{22},\ \dfrac{1}{4}-(\dfrac{1}{2})^{22}$

$\boxed{解析}$：$a_{20}=\dfrac{1}{8}\times(\dfrac{1}{2})^{19}=2^{-22}=(\dfrac{1}{2})^{22}$

$$S_{20}=\frac{\frac{1}{8}[1-(\frac{1}{2})^{20}]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{2})^{20}]=2^{-2}-2^{-22}=(\frac{1}{4})-(\frac{1}{2})^{22}$$

21、兩等差數列，第 n 項之比爲$(3n-1):(4n+2)$，則首 13 項和之比爲______。

$\boxed{答案}$：2 : 3

$\boxed{解析}$：$S_{13}:S'_{13}=13\times a_7\ :\ 13a'_7$

$a_7:a'_7=20\ :\ 30=2\ :\ 3$

22、將自然數按下列規律排列，每一列比前一列多一個數，如下表所示：

第1列	1
第2列	2,3
第3列	4,5,6
第4列	7,8,9,10
…	…

試問第 100 列第 3 個數是_______。

$\boxed{答案}$：4953

$\boxed{解析}$：第 1 列至第 99 列的數共有

$1+2+3+\cdots+99=\dfrac{99\times100}{2}=4950$（個）

$\therefore$第 100 列的第 3 個數是 4953。

23、設 a 與 b 均爲實數。若$\dfrac{a}{2^1}+\dfrac{b}{2^2}+\dfrac{a}{2^3}+\dfrac{b}{2^4}+\cdots+\dfrac{a}{2^{2n-1}}+\dfrac{b}{2^{2n}}+\cdots=3$ ，則$2a+b=$______。

答案：9

解析：左式為 $(\frac{a}{2}+\frac{a}{2^3}+\cdots)+(\frac{b}{2^2}+\frac{b}{2^4}+\cdots)=\dfrac{\frac{a}{2}}{1-\frac{1}{4}}+\dfrac{\frac{b}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2a}{3}+\frac{b}{3}=3\Rightarrow 2a+b=9$

(公比$\frac{1}{4}$) (公比$\frac{1}{4}$)

24、將正奇數由小而大依下列方式分組 (1), (3), (5,7), (9,11), (13,15,17), (19,21,23),$\cdots$，已知第 3 組中的第一個數為 5，則(1)第 21 組中的第一個數為__________，(2)第 21 組內所有數的和為______。

答案：(1)221(2)2541

解析：第 21 組中共有 11 個數，由第 1 組到第 20 組共有$2(1+2+\cdots+10)=110$個數，故第 21 組中的第一個數為第 111 個奇數 $=221$，

第 21 組中的所有數之和$=\frac{11\times[442+(11-1)\times 2]}{2}=2541$

25、已知一等差數列，首項為 12，且前 6 項之和與前 19 項之和相等，求此數列之公差為______。

答案：-1

解析：$\because S_6=S_{19}$ $\therefore a_7+a_8+\cdots+a_{19}=0$ $\therefore 13\times a_{13}=0$ $\therefore a_{13}=0$則$12+12d=0,\therefore d=-1$。

26、某公司民國 85 年營業額為 4 億元，民國 86 年營業額為 6 億元，該年的成長率為 50%。87、88、89 三年的成長率皆相同，且民國 89 年的營業額為 48 億元。則該公司 89 年的成長率為______%

答案：100

解析：令 86 年營業額 6 億元為首項，設 87 年之成長率為 r %

則 $48=6\times(1+r\%)^3\Rightarrow 8=(1+r\%)^3\Rightarrow 1+r\%=2$ $r\%=1\Rightarrow r=100$

27、有一等差數列＜a_n＞，若$a_4+a_{12}=9$，則$a_5+a_7+a_9+a_{11}$的值為___________。

答案：18

28、設 a,b,c 三數成等比數列且 $a<c$，其三數和為 39，又知$a-1,b,c-8$成等差數列，則 b =______, a =______。

答案：10, 4

解析：$\because a-1,\ b,\ c-8$成等差數列 $\therefore a+c-9=2b$，$\therefore a+b+c=39$ $\therefore 39-b-9=2b$
$\therefore b=10$，$\therefore a+c=29$ 且 $ac=100$, $\therefore a=4, c=25$

29、(1)求$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+\cdots=$______。(2)求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2}{5^n}=$______。

答案：(1)$\frac{5}{6}$ (2)2

解析：(1)原式$=\dfrac{1}{1-(-\frac{1}{5})}=\frac{5}{6}$。(2)原式$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}=\dfrac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}+\dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5}}=2$。

$S_{27}=(6+18+\cdots)+79=\frac{3(12+12\times 12)}{2}+79=1093$