<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：93.11.22</td></tr>
<tr><td>範圍</td><td>2-4 複數平面 2+Ans</td><td>班級
座號</td><td></td><td>姓名</td><td></td></tr>
</table>

一.選擇題 (每題 10 分)

(D)1. 下列各式何者正確？

(A) $\sqrt{6}=\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$　(B) $\sqrt{-6}=-\sqrt{2}\times\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$　(D) $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$

【詳解】

(A) $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=\sqrt{6}i^2=-\sqrt{6}$，故 $\sqrt{6}\neq\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$

(B) $\sqrt{-6}=\sqrt{6}i$，$-\sqrt{2}\times\sqrt{3}=-\sqrt{6}$，故 $\sqrt{-6}\neq-\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

(C) $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}i$，$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}i}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot i}{\sqrt{2}\cdot i^2}=\dfrac{\sqrt{3}i}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}i$

(D)由(C)可知 $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}i$，$-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}=-(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}i)=\sqrt{\dfrac{3}{2}}i$　故 $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$

(C)2.下列敘述何者正確？

(A)若 $z=a+bi$ 為複數，則 b 為 z 之虛部　(B)若 $a+bi=0$，則 $a=b=0$

(C)若 $a^2>b^2$，則 $a^2-b^2>0$　(D)若 $a^2-b^2>0$，則 $a^2>b^2$

【詳解】

(A)若 $z=a+bi$ 為複數且 a，$b\in R$，則 b 才為 z 之虛部，故(A)不正確

(B)若 $a+bi=0$ 且 a，$b\in R$，則 $a=b=0$，故(B)不正確

(C)若 $a^2>b^2$，則 $a^2-b^2>0$ 成立，故(C)正確

(D)若 $a^2-b^2>0$ 且 a^2，$b^2\in R$，則 $a^2>b^2$，故(D)不正確

(C)3. 以 $2+\sqrt{2}\,i$ 及 $2-\sqrt{2}\,i$ 為根作一個一元二次方程式為

(A) $x^2+4x-2=0$　(B) $x^2-2x-3=0$　(C) $x^2-4x+6=0$　(D) $x^2-2x-1=0$

(E) $x^2-4x+8=0$。

【詳解】

$\because$　$(2+\sqrt{2}\,i)+(2-\sqrt{2}\,i)=4$，$(2+\sqrt{2}\,i)(2-\sqrt{2}\,i)=6$

$\therefore$　以 $2+\sqrt{2}\,i$ 及 $2-\sqrt{2}\,i$ 為二根之二次方程式為 $x^2-4x+6=0$

(BCE)4. 設 Z_1 與 Z_2 為方程式 $Z^2=-3+4i$ 的二根，則下列何者正確？(複選)

(A) $\overline{Z_1}=Z_2$　(B) $|Z_1|=|Z_2|=\sqrt{5}$　(C) $Z_1+Z_2=0$　(D) $Z_1+Z_2=4i$　(E) $Z_1Z_2=-Z^2$

【詳解】

設 $Z=x+yi$　$\therefore$　$(x+yi)^2=-3+4i$　$\Rightarrow$　$x^2-y^2+2xyi=-3+4i$

$\therefore$　$\begin{cases}x^2-y^2=-3\cdots\cdots①\\2xy=4\cdots\cdots②\end{cases}$　又　$x^2+y^2=5\cdots\cdots③$

$\dfrac{①+③}{2}$ 得 $x^2=1$ 代入③得 $y^2=4$　$\Rightarrow$　$x=\pm1$，$y=\pm2$

但由②知 $xy=2$　$\therefore$　$x=1$，$y=2$ 或 $x=-1$，$y=-2$，　$\therefore$　$Z_1=1+2i$，$Z_2=-1-2i$

(A) $\overline{Z_1}=\overline{1+2i}=1-2i\neq Z_2$

(B) $|Z_1|=|Z_2|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

(C)(D) $Z_1 + Z_2 = 1 + 2i + (-1 - 2i) = 0$

(E) $Z_1 Z_2 = (1 + 2i)(-1 - 2i) = 3 - 4i = -Z^2$

(D)5. 設$a = m + ni$，m，$n \in R$，規定 $|a| = \sqrt{m^2 + n^2}$，則下列敘述何者正確？

(A) $a^2 \geq 0$ (B) $|a|^2 = a^2$ (C)若$\overline{a} = a$，則$a \in R$ (D)若$a \in R$，則$\overline{a} = a$

(E)若 $|a| = 1$，則$a = \pm 1$。

【詳解】

(A) $a^2 = (m^2 - n^2) + (2mn)i$可能是虛數，也可能是實數，但未必 ≥ 0

(B) $|a|^2 = m^2 + n^2 \geq 0$，由(A)知 $|a|^2 = a^2$ 未必成立

(C)若$\overline{a} = a \Rightarrow m - ni = m + ni \quad \therefore \quad n = 0 \quad \therefore \quad a = m \in R$

(D)若$a = m + ni \in R \quad \therefore \quad n = 0 \quad \therefore \quad \overline{a} = m = a$

(E)若 $|a| = 1 \quad \therefore \quad m^2 + n^2 = 1$，此種$(m，n)$有無限多組，如$(\frac{4}{5}，\frac{3}{5})$，$(\frac{1}{\sqrt{2}}，\frac{1}{\sqrt{2}})$，…

(B)6.複數平面上，所有滿足$|z - 2 - i| = 3$ 的點，所成的圖形爲何？

(A)一直線 (B)一圓 (C)一點 (D)不存在 (E)以上皆非

【詳解】$|z - 2 - i| = 3$ 之圖形爲複數平面上與點(2，1)距離 3 的點之集合，亦即圓

二、填充題(每題 10 分)

7.一元二次方程式$x^2 - x - 3 = 0$ 的二根爲α、β，則$\alpha^3 + \beta^3 =$ ＿＿＿＿＿＿。

【詳解】因爲$\begin{cases}\alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = -3\end{cases}$，$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 1 - 3(-3) \cdot 1 = 10$

8.x，$y \in R$，若$\frac{1+3i}{x+yi} = 1 + i$，則數對$(x，y) =$ ＿＿＿＿＿＿。

【詳解】

$\because \quad \frac{1+3i}{x+yi} = 1 + i$，$\therefore \quad x + yi = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4+2i}{2} = 2 + I,$

$\because \quad x，y \in R \quad \therefore \quad x = 2，y = 1$

9.設$\overline{(\frac{7+2i}{5-3i})} = a + bi$，其中$a$，$b$爲實數，試求有序數對$(a，b) =$ ＿＿＿＿＿＿。

【詳解】

$\overline{(\frac{7+2i}{5-3i})} = \frac{\overline{7+2i}}{\overline{5-3i}} = \frac{7-2i}{5+3i} = \frac{(7-2i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)} = \frac{29-31i}{34} = \frac{29}{34} + \frac{-31}{34} i$

$\therefore \quad (a，b) = (\frac{29}{34}，\frac{-31}{34})$

10.複數$(\sqrt{2} - i)^4$的虛部爲＿＿＿＿＿＿。

【詳解】$(\sqrt{2} - i)^2 = 1 - 2\sqrt{2}i \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{2} - i)^4 = -7 - 4\sqrt{2}i$

11.設a，$b \in R$且$[(a + 1) - 4i] + [5 + (b - 2)i] = 2 + 5i$，則$\overline{a + bi} =$ ＿＿＿＿＿＿。

【詳解】

$[(a + 1) - 4i] + [5 + (b - 2)i] = 2 + 5i \quad \Rightarrow \quad (a + 1 + 5) + (-4 + b - 2)i = 2 + 5i$

$\Rightarrow \quad (a + 6) + (b - 6)i = 2 + 5i \Rightarrow \begin{cases} a + 6 = 2 \\ b - 6 = 5 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a = -4 \\ b = 11 \end{cases}$

$\therefore\quad \overline{a+bi}=\overline{-4+11i}=-4-11i$

12.設$a\in R$，若二次方程式$x^2-ax-a+8=0$有相等實根，則a爲__________。

【詳解】

$a\in R$，$x^2-ax-a+8=0$有相等實根，則$D=(-a)^2-4(-a+8)=0\Rightarrow a^2+4a-32=0$

$\Rightarrow\quad (a-4)(a+8)=0\quad\Rightarrow\quad a=4$ 或 -8

13.設$z=1+2i$，$w=4-3i$，則絕對值 $\left|\dfrac{z^2}{w}\right|=$__________；又共軛複數$\overline{z\cdot w}=$__________（以複數$a+bi$形式表之）。

【詳解】

$z=1+2i\quad\Rightarrow\quad |z|=\sqrt{5}$；$w=4-3i\quad\Rightarrow\quad |w|=5$，$\quad\left|\dfrac{z^2}{w}\right|=\dfrac{|z|^2}{|w|}=\dfrac{(\sqrt{5})^2}{5}=1$

又$\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}=(1-2i)(4+3i)=4+6+(3-8)\,i=10+(-5)i$

14.設$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則化簡$(1+\omega)^6+(1+\omega^2)^6+(\omega+\omega^2)^6$之值爲__________。

【詳解】

$\because\quad \omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\quad\therefore\quad \omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore\quad (1+\omega)^6+(1+\omega^2)^6+(\omega+\omega^2)^6=(-\omega^2)^6+(-\omega)^6+(-1)^6$

$=\omega^{12}+\omega^6+1=(\omega^3)^4+(\omega^3)^2+1=3$

15.設α，β爲方程式$x^2+8x+4=0$的兩根，則以$\alpha+\beta$及$\alpha\beta$爲兩根的二次方程式爲__________；而$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$之值爲__________。

【詳解】

α，β爲$x^2+8x+4=0$的兩根$\therefore\quad \alpha+\beta=-8$，$\alpha\beta=4$，

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-4$，$\qquad(\alpha+\beta)(\alpha\beta)=-32$

$\therefore$ 以$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$爲兩根的二次方程式爲$x^2-[(\alpha+\beta)+\alpha\beta]x+(\alpha+\beta)(\alpha\beta)=0$

即$x^2+4x-32=0$

又$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}\qquad$（$\because\quad \alpha<0$，$\beta<0$）

$=-8-2\sqrt{4}\ =-12$

16.$a\in R$，方程式$x^2-(a+i)x=2-2i$有一實根，則此方程式之二根爲__________。

【詳解】

設實根爲$\alpha\quad\Rightarrow\quad \alpha^2-(a+i)\alpha=2-2i$

$\Rightarrow\quad (\alpha^2-ax-2)+(-\alpha+2)i=0$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases}-\alpha+2=0 & \cdots\cdots①\\ \alpha^2-a\alpha-2=0 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 由①得$\alpha=2$代入② $4-2a-2=0$，$2a=2$，$a=1$

$\therefore$ 此方程式爲$x^2-(1+i)x+(-2+2i)=0$，有一實根 2

$\Rightarrow\quad (x-2)\mid x^2-(1+i)x+(-2+2i)$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} & 1 + (1-i) \\ \hline 1-2 & 1 - (1+i) + (-2+2i) \\ & 1 \quad -2 \\ \hline & (1-i) + (-2+2i) \\ & (1-i) + (-2+2i) \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad x^2-(1+i)x+(-2+2i)=(x-2)(x+(1-i))=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$ 或 $-1+i$

17.將複數$\dfrac{1-i}{2+i}$化為$a+bi$的形式，其中a，$b\in R$，$i=\sqrt{-1}$，則數對$(a，b)=$___________。

【詳解】$\dfrac{1-i}{2+i}=\dfrac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{2-i-2i+i^2}{2^2-i^2}=\dfrac{1-3i}{5}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}i=a+bi$

18.設$z=\dfrac{(5-12i)\cdot(7+2i)}{(2-7i)\cdot(3+4i)}$，則 $|z|=$___________。

【詳解】

(1)若α，$\beta\in C$，$\beta\neq0$，則 $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$，$|\dfrac{\alpha}{\beta}|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

(2)$\because \quad |z|=|\dfrac{(5-12i)\cdot(7+2i)}{(2-7i)\cdot(3+4i)}|=\dfrac{|5-12i|\cdot|7+2i|}{|2-7i|\cdot|3+4i|}=\dfrac{\sqrt{5^2+12^2}\cdot\sqrt{7^2+2^2}}{\sqrt{2^2+7^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{13\cdot\sqrt{53}}{\sqrt{53}\cdot5}=\dfrac{13}{5}$

19.設α，β為 $3x^2+7x+3=0$ 的二根，則$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$之值為___________。

【詳解】

(1)方程式之判別式$D=49-4\times3\times3>0$，兩根為實數

而$\alpha+\beta<0$，$\alpha\beta>0$，$\therefore \quad \alpha<0$，$\beta<0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\alpha}\ \sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta}$

(2)$\because \quad (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+2\sqrt{\alpha}\ \sqrt{\beta}+(\sqrt{\beta})^2=\alpha-2\sqrt{\alpha\beta}+\beta=-\dfrac{7}{3}-2\sqrt{1}=-\dfrac{13}{3}$

20.在複數平面上表示三複數$-2+i$，$4+i$，$2-3i$的三個點A，B，C，則$\triangle ABC$之垂心所表的複數為___________。

【詳解】

$-2+i\leftrightarrow A$，$4+i\leftrightarrow B$，$2-3i\leftrightarrow C$，$A(-2，1)$，$B(4，1)$，$C(2，-3)$

$\because \quad \overline{BC}$ 之斜率為$\dfrac{1-(-3)}{4-2}=2$

$\therefore \quad$ 過 A 點的高所在直線為 $y-1=-\dfrac{1}{2}(x+2) \quad\Rightarrow\quad x+2y=0$……①

又$\because \quad \overline{AC}$ 之斜率為$\dfrac{1-(-3)}{-2-2}=-1$

$\therefore \quad$ 過 B 點的高所在直線為 $y-1=1\cdot(x-4)\Rightarrow \quad x-y-3=0$……②

① − ②得 $y=-1$，代入① $x=2$，得垂心 H 之坐標為$(2，-1)$

21.設$z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，則 $1+z^{88}+\sqrt{2}\,z^{1999}=$___________。

【詳解】$\because \quad z^2=(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})^2=\dfrac{2i}{2}=i$，$\therefore \quad z^{88}=(z^2)^{44}=1$

$z^{1999}=z^{1998}\cdot z=(z^2)^{999}\cdot z=(i)^{999}\cdot z=i^{996}\cdot i^3\cdot z=(i^4)^{249}\cdot(-i)z=-iz$

故 $1+z^{88}+\sqrt{2}\,z^{1999}=1+1+\sqrt{2}(-i)\cdot\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$= 2 - i(1 + i) = 2 - i + 1 = 3 - i$

22.化簡$\dfrac{(3-\sqrt{-16})\cdot(-1+\sqrt{-25})}{2+\sqrt{-9}}$爲標準式得＿＿＿＿＿＿。

【詳解】

$$\frac{(3-\sqrt{-16})\cdot(-1+\sqrt{-25})}{2+\sqrt{-9}}=\frac{(3-4i)(-1+5i)}{2+3i}$$

$$=\frac{(-3+20)+(4+15)i}{2+3i}=\frac{17+19i}{2+3i}=\frac{(17+19i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$$

$$=\frac{(34+57)+(38-51)i}{4+9}=\frac{91-13i}{13}=7-i$$

23.設$i=\sqrt{-1}$，若 $1 - i$爲$x^2 - cx + 1 = 0$ 之一根，則複數$c =$＿＿＿＿＿＿。（以$a + bi$的形式表示）

【詳解】

$\because$ $1 - i$爲$x^2 - cx + 1 = 0$ 之一根 $\therefore$ $(1 - i)^2 - c(1 - i) + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $1 - 2i + i^2 - c(1 - i) + 1 = 0$ $\Rightarrow$ $c(1 - i) = 1 - 2i$

$\Rightarrow$ $c=\dfrac{1-2i}{1-i}=\dfrac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+i-2i-2i^2}{1-i^2}=\dfrac{1-i+2}{1+1}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{i}{2}$

24.設複數z滿足$z^2 = 5 - 12i$，則此複數$z =$＿＿＿＿＿＿。

【詳解】

設$z = a + bi$，a，$b \in R$

$\Rightarrow$ $(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = 5 - 12i$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} a^2-b^2=5 \cdots\cdots ① \\ 2ab=-12 \cdots\cdots ② \end{cases}$

$\Rightarrow$ 由②得$b=-\dfrac{6}{a}$代入① $\Rightarrow$ $a^2-\dfrac{36}{a^2}=5$

$\Rightarrow$ $a^4 - 5a^2 - 36 = 0$ $\Rightarrow$ $(a^2 - 9)(a^2 + 4) = 0$

$\Rightarrow$ $a^2 = 9$ 或 -4（不合）（$\because$ $a \in R$，$a^2 \geq 0$）$\Rightarrow$ $a = \pm 3$

$\therefore$ $(a，b) = (3，-2)$或$(-3，2)$ $\Rightarrow$ $z =$ $3 - 2i$或 $-3 + 2i$