高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.11.15					
範圍	2-4 複數平面+Ans	班級		姓名	
		座號			

一.選擇題 (每題 10 分)

1、(C) $(4-3i)(5+2i)=a+bi$, $\dfrac{5+2i}{4+3i}=c+di$ ，a, b, c, d 均為實數，則

(A) $a=20$ (B) $b=7$ (C) $c=\dfrac{26}{25}$ (D) $d=\dfrac{-7}{5}$ (E) $25a=c$

解析：$(4-3i)(5+2i)=26-7i \therefore a=26, b=-7$

$\dfrac{5+2i}{4+3i}=\dfrac{26-7i}{25}$, $c=\dfrac{26}{25}, d=\dfrac{-7}{25}$

2、(A) 設 $1-i$ 為 $x^2+ax+3-i=0$ 的一根，則 a 的值為何？ (A) -3 (B) -2 (C) $-1-i$ (D) 2 (E) 3

解析：$\because 1-i$ 為方程式的一解 $\therefore$ 代入方程式 $\Rightarrow (1-i)^2+a(1-i)+3-i=0$

$\Rightarrow 1-2i+i^2+a-ai+3-i=0 \Rightarrow (a+3)+(-a-3)i=0 \Rightarrow a+3=0$ $\therefore a=-3$，故選(A)

3、(B) 以下何者錯誤？

(A) $a, b\in\mathbb{R}$, $a-bi$ 的共軛複數是 $a+bi$ (B) 一對共軛複數的和必為正實數或 0

(C) 一對共軛複數的積必為正實數或 0 (D) $i^2=-1$ (E) $i^{62}=-1$

解析：一對共軛複數的和 $a+bi+(a-bi)=2a$ 必為實數，可正可負

4、(C) 下列何者錯誤？ (A) $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{-6}$ (B) $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=-\sqrt{6}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{-\dfrac{2}{3}}$

(D) $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (E) $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{-\dfrac{2}{3}}$

解析：$\because \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}i}=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$ ，$\sqrt{\dfrac{2}{-3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$ 並不相等

5、(DE) 設 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}$ ，則下列何者為真？(複選) (A) $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ 且 $\beta=0$

(B) $\alpha+\beta>0$ 且 $\alpha\beta>0 \Leftrightarrow \alpha>0$ 且 $\beta>0$ (C) $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma$ 且 $\beta=\delta$

(D) $\alpha\beta\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ 且 $\beta\neq 0$ (E) $\alpha^2+\beta^2=0$ 且 $\alpha\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ 且 $\beta=0$

解析：(A)（╳）：例，$\alpha=i, \beta=1$ 。

(B)（╳）：例，$\alpha=1+i, \beta=1-i$ 。

(C)（╳）：例，$\alpha=2i, \beta=1, \gamma=3i, \delta=0$ 。

(D)（○）

(E)（○）

故答案為(D)(E)。

二. 填充題 (每題 10 分)

6、設 $a,b\in\mathbb{R}$ ，若 $\dfrac{-4+3i}{a+bi}=2+i$ ，求數對 $(a,b)=$______。

答案：$(-1,2)$

解析：$\because \dfrac{-4+3i}{a+bi}=2+i, \therefore a+bi=\dfrac{-4+3i}{2+i}=\dfrac{-4+3i}{2+i}\times\dfrac{2-i}{2-i}=-1+2i$ $\therefore (a,b)=(-1,2)$ 。

7、設 $a\in\mathbb{R}$ ，若方程式 $x^2+(3a+2-i)x+(2a-i)=0$ 有實根，試求 $a=$______，另一虛根為

______。

答案：-1；$2+i$

解析：設實根為α，另一虛根為β

$\alpha^2+(3a+2-i)\alpha+(2a-i)=0$

$\alpha^2+3a\alpha+2\alpha+2a-(\alpha+1)i=0$

$\therefore \begin{cases}\alpha^2+3a\alpha+2\alpha+2a=0\cdots\cdots①\\ \alpha+1=0\cdots\cdots②\end{cases}$

由②$\alpha=-1$ 代入① $1-3a-2+2a=0\Rightarrow a=-1$

又 $\alpha+\beta=-(3a+2-i)\Rightarrow -1+\beta=1+i\Rightarrow \beta=2+i$，$\therefore a=-1$，另一虛根為$2+i$。

8、$m\in\mathbb{R},\ z=(\frac{m^2-5m-6}{m-2})+(\frac{m^2-m-6}{m+1})i$，(1)當 $m=$______時，z 為實數；(2)當 $m=$______時，z 為純虛數。

答案：3 或-2，6

解析：$z\in\mathbb{R}$ $\therefore \frac{m^2-m-6}{m+1}=0$，$m=3$ 或 -2

z 為純虛數$\frac{m^2-5m-6}{m-2}=0$ 且 $\frac{m^2-m-6}{m+1}\neq 0$，$m=6$ 或 -1(不合)

9、解方程式$x^2-2x+3=0$得其兩根為______。

答案：$1\pm\sqrt{2}i$

解析：$x^2-2x+3=0$之兩根為$x=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}=1\pm\sqrt{2}i$

10、設$z\in\mathbb{C},z\cdot(1+i)^{26}=(1-i)^{20}$，則$z=$_____。

答案：$\frac{1}{8}i$

解析：$(1+i)^2=2i,\ (1-i)^2=-2i,\ z\cdot(2i)^{13}=(-2i)^{10}$ ，$z=\frac{1}{2^3i^3}\therefore z=+\frac{1}{8}i$

11、$x\in\mathbb{R},x\neq 0$，使$i(2x+i)^2$為實數之 x 為____。

答案：$\pm\frac{1}{2}$

解析：$i(2x+i)^2=i(4x^2+4xi-1)=(4x^2-1)i-4x$為實數 $\therefore 4x^2-1=0,x=\pm\frac{1}{2}$

12、設$Z\in\mathbb{C}$，Z的虛部為-1 且$\frac{1}{Z}$的虛部為$\frac{1}{2}$，求$Z=$______。

答案：$1-i$或$-1-i$

解析：令$Z=a-i$，$\therefore \frac{1}{Z}=\frac{1}{a-i}=\frac{a+i}{a^2+1}$，$\therefore \frac{1}{a^2+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\pm1$，$\therefore a=\pm1$

$\therefore Z=-1-i$或$1-i$。

13、設$x,y\in\mathbb{R}$，$(-3+2i)(x+yi)+(2y-6xi)=-3+5i$，則$x=$_____，$y=$_____。

答案：1，-3

解析：$(-3+2i)(x+yi)+(2y-6xi)=-3+5i$

$-3x+(-3y-4x)i=-3+5i$

$\therefore x=1, y=-3$

14、a, b 爲實數，且 $a+b=-10,\ ab=21$，則 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=$______。

$\boxed{答案}$：$\pm(\sqrt{7}+\sqrt{3})i$

$\boxed{解析}$：$a+b=-10,\ ab=21,\ a<0,\ b<0$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}=a+b-2\sqrt{ab}=-10-2\sqrt{21}=\pm(\sqrt{7}+\sqrt{3})i$

15、設 α, β 爲方程式 $x^2+6x+1=0$ 的二根，求 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=$______。

$\boxed{答案}$：$2\sqrt{2}i$

$\boxed{解析}$：利用根與係數的關係，$\therefore \begin{cases}\alpha+\beta=-6\\ \alpha\beta=1\end{cases}$ 且 $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$，$\therefore \begin{cases}\alpha<0\\ \beta<0\end{cases}$

$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=-8$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\pm\sqrt{8}i=\pm2\sqrt{2}i$（負不合），$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2\sqrt{2}i$。

16、設 $z=4+i$ 求 $\dfrac{2z+i}{\bar{z}-1}$ 之共軛複數爲____。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{21-17i}{10}$

$\boxed{解析}$：$\overline{(\dfrac{2z+i}{\bar{z}-1})}=\dfrac{2\bar{z}-i}{z-1}=\dfrac{8-2i-i}{3+i}=\dfrac{8-3i}{3+i}=\dfrac{21-17i}{10}$

18、化簡 $\dfrac{13}{3+\sqrt{-4}}+\dfrac{25}{4-\sqrt{-9}}=$______。

$\boxed{答案}$：$7+i$

$\boxed{解析}$：$\dfrac{13}{3+2i}+\dfrac{25}{4-3i}=(3-2i)+(4+3i)=7+i$

19、令 $z=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ 則 $z^{10}+z^{12}+\cdots+z^{50}=$____。

$\boxed{答案}$：$-i$

$\boxed{解析}$：$z=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}},\ z^2=\dfrac{-2i}{2}=-i$，$(-i)^5+(-i)^6+\cdots+(-i)^{25}=\dfrac{(-i)^5[1-(-i)^{21}]}{1-(-i)}=\dfrac{(-i)(1+i)}{(1+i)}=-i$

20、設 $1-2i+3i^2-4i^3+\cdots-60i^{59}=a+bi$，$a,b\in\mathbb{R}$，則 $a=$______, $b=$______。

$\boxed{答案}$：$-30, 30$

$\boxed{解析}$：$1-2i-3+4i+5-\cdots+60i=(1-3+5-\cdots-59)+(-2+4-6+8-\cdots+60)i=-30+30i$

21、$x, y\in\mathbb{R},\ (x+yi)(4+3i)=1-2i$，則 $x=$______, $y=$______。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{-2}{25}, \dfrac{11}{25}$

$\boxed{解析}$：$x+yi=\dfrac{1-2i}{4+3i}=\dfrac{(1-2i)(4-3i)}{25}=\dfrac{-2-11i}{25}$ $\therefore x=\dfrac{-2}{25},\ y=\dfrac{-11}{25}$

22、$a>0$ 則 $\left|\dfrac{2\sqrt{3}(2-ai)}{(\sqrt{2}+i)(a-2i)}\right|=$______。

$\boxed{答案}$：2

$\boxed{解析}$：$\left|\dfrac{2\sqrt{3}(2-ai)}{(\sqrt{2}+i)(a-2i)}\right|=\dfrac{2\sqrt{3}|2-ai|}{|\sqrt{2}+i||a-2i|}=\dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{a^2+4}}{\sqrt{3}\sqrt{a^2+4}}=2$

23、$z_1=6+i$，$z_2=-4+6i$，則$|z_1-z_2|=$____________。

$\boxed{答案}$：$5\sqrt{5}$

24、設$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，試求(1) $(2+5\omega+2\omega^2)^6=$_______。(2) $\omega^{100}+\dfrac{1}{\omega^{100}}=$_______。

$\boxed{答案}$：(1)729　　(2) -1

$\boxed{解析}$：$\because \omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \therefore 1+\omega+\omega^2=0, \omega^3=1$

(1) $(2+5\omega+2\omega^2)^6=[2(1+\omega+\omega^2)+3\omega]^6=(3\omega)^6=3^6\omega^6=729\cdot 1=729$

(2) $\omega^{100}=(\omega^3)^{33}\cdot\omega=\omega$　　$\therefore \omega^{100}+\dfrac{1}{\omega^{100}}=\omega+\dfrac{1}{\omega}=\omega+\omega^2=-1$

25、設$x, y\in\mathbb{R}$, $x+y=1$, $xy=-6$，則$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=$_______。

$\boxed{答案}$：$-\dfrac{\sqrt{6}}{6}i$

$\boxed{解析}$：$\because x+y=1,\ xy=-6 \therefore x,y$ 異號 $x+\dfrac{-6}{x}=1$

$\therefore x=3,\ y=-2$ 或 $x=-2,\ y=3$

$\therefore \dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{2i}{\sqrt{6}}-\dfrac{3i}{\sqrt{6}}=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}i=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}i$

26、設a, b 爲實數$\dfrac{1}{2-3i}+\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}$，則$a=$_______$, b=$_______。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{9}{17},\ \dfrac{19}{17}$

$\boxed{解析}$：$\dfrac{1}{2-3i}+\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}\therefore\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}-\dfrac{2+3i}{13}$

$\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{9+19i}{17}\therefore a+bi=\dfrac{26}{9-19i}=\dfrac{26(9+19i)}{442}$

$a+bi=\dfrac{9+19i}{17}\therefore a=\dfrac{9}{17}, b=\dfrac{19}{17}$

27、已知i爲虛數單位，試問(1) $i^{2003}+i^{24}=$_______。(2) $(1+i)^{12}=$_______。

$\boxed{答案}$：(1) $1-i$　　(2) -64

$\boxed{解析}$：(1) $i^{2003}+i^{24}=(i^4)^{500}\cdot i^3+(i^4)^6=-i+1=1-i$。

(2) $(1+i)^2=1^2+2i+i^2=2i$　　$\therefore (1+i)^{12}=[(1+i)^2]^6=(2i)^6=-64$。

28、設a爲一實數。若方程式 $3x^2+(a-6i)x-2+4i=0$ 有實根，試求a之値及二根。

$\boxed{答案}$：設此一實根爲 r，則　$3r^2+(a-6i)r-2+4i=0$，

即　　$(3r^2+ar-2)+(4-6r)i=0$，

而有　　$3r^2+ar-2=0$ 且 $4-6r=0$，

得 $r=\dfrac{2}{3}$, $a=1$。

另一根為 兩根之積 $\div r=\dfrac{-2+4i}{3}\times\dfrac{3}{2}=-1+2i$ 。

31、(1)設 z 為複數且 $z^2=-8-6i$ ，則 $z=$ ？

(2)求 $x^2-(4+2i)x+(11+10i)=0$ 之二根為何？

$\boxed{\text{答案}}$：(1)$1-3i,\ \ -1+3i$　(2)3-2i 或 1+4i

$\boxed{\text{解析}}$：(1)設 $z=a+bi, z^2=-8-6i.\therefore\begin{cases}a^2-b^2=-8\\2ab=-6\end{cases}$ ，又 $a^2+b^2=10\Rightarrow(a,b)=(1,-3)$或$(-1,3)$

(2) $x^2-(4+2i)x+(11+10i)=0$ 之二根

$x=\dfrac{(4+2i)+[(4+2i)^2-4(11+10i)]\text{的平方根}}{2}$

$(4+2i)^2-4(11+10i)=-32-24i$

$(-32-24i)$ 的平方根為 $\pm(2-6i)$

$\therefore x=\dfrac{(4+2i)\pm(2-6i)}{2}\therefore x=3-2i$ 或 $1+4i$

33、設 a 為實數， $x^3+3x^2+ax+9=0$ 有純虛根，則 $a=$ ？又此虛根為何？

$\boxed{\text{答案}}$：3, $\pm\sqrt{3}i$

$\boxed{\text{解析}}$： $x^3+3x^2+ax+9=0$ 有純虛根 αi ,$(\alpha\in\mathbb{R})$

$\therefore(\alpha i)^3+3(\alpha i)^2+a(\alpha i)+9=0.\because(-3\alpha^2+9)+i(-\alpha^3+a\alpha)=0$

$\therefore-3\alpha^2+9=0,\alpha=\pm\sqrt{3},-\alpha^3+a\alpha=0.\because a=\alpha^2=3$

此虛根為 $\pm\sqrt{3}i$