高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.10.26					
範圍	2-2 有理數、實數 +Ans	班級		姓名	
		座號			

一.選擇題 (每題 10 分)

1、(D) 設 $a, b \in R$ 且 $a < b$，令甲 $=\dfrac{a+2b}{3}$，乙 $=\dfrac{3a+b}{4}$，丙 $=\dfrac{a+5b}{6}$,則甲、乙、丙之大小順序為 (A) 甲 > 乙 > 丙 (B) 乙 > 甲 > 丙 (C) 乙 > 丙 > 甲 (D) 丙 > 甲 > 乙 (E) 丙 > 乙 > 甲

$\boxed{\text{解析}}$：$\because a<b \therefore$ 甲 $=\dfrac{8a+16b}{24}$，乙 $=\dfrac{18a+6b}{24}$，丙 $=\dfrac{4a+20b}{24}$，$\therefore$ 丙 > 甲 > 乙。

2、(A) 設 $a,b \in \mathbb{R}$，且 $a<b<0$，令甲 $=\dfrac{a+b}{2}$，乙 $=\dfrac{5a+2b}{7}$，丙 $=\dfrac{11a+3b}{14}$，則甲、乙、丙之大小順序為 (A) 甲 > 乙 > 丙 (B) 乙 > 甲 > 丙 (C) 乙 > 丙 > 甲 (D) 丙 > 甲 > 乙 (E) 丙 > 乙 > 甲

$\boxed{\text{解析}}$：$0>b>a$,甲 $=\dfrac{7a+7b}{14}$,乙 $=\dfrac{10a+4b}{14}$,丙 $=\dfrac{11a+3b}{14}$,$\therefore$ 甲 > 乙 > 丙。

3、(B) 設 a, b 都是無理數，c 為有理數，以下何者必為無理數？ (A) $a+b$ (B) $a+c$ (C) $a\cdot b$ (D) $a\cdot c$ (E) $a+\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$\boxed{\text{解析}}$：(A) $\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})=1$ 為有理數。 (C) $\sqrt{2}\sqrt{2}=2$ 為有理數。
(D) $\sqrt{2}\times 0=0$ 為有理數。 (E)令 $a=1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$，則 $a+\sqrt{2}-\sqrt{3}=1$ 為有理數。

4、(BCD) (複選)下列敘述何者正確？ (A) $0.3\overline{43}$ 不是有理數 (B) $0.\overline{34}>\dfrac{1}{3}$
(C) $0.\overline{34}>0.343$ (D) $0.\overline{34}<0.35$ (E) $0.\overline{34}>0.3\overline{43}$

$\boxed{\text{解析}}$：(A)（╳）：$0.3\overline{43}=\dfrac{340}{990}=\dfrac{34}{99}$ 為有理數。(B)（○）：$0.\overline{34}=\dfrac{34}{99}>\dfrac{33}{99}=\dfrac{1}{3}$。
(C)（○）：$0.\overline{34}=0.3434\cdots>0.343$。 (D)（○）：$0.\overline{34}=0.3434\cdots<0.35$。
(E)（╳）：$0.\overline{34}=0.3434\cdots=0.3\overline{43}=0.34343\cdots$。
故答案為(B)(C)(D)。

5、(AE) (複選)下列敘述何者正確？（令 Q' 表所有無理數所成集合）
(A) 若 $a\in Q, b\in Q'$，則 $a+b\in Q'$ (B) 若 $a\in Q, b\in Q'$，則 $ab\in Q'$
(C) 若 $a,b\in Q'$，則 $a+b\in Q'$ (D) 若 $a,b\in Q'$，則 $\dfrac{a}{b}\in Q'$
(E) 若 $a,b\in Q$，則 $a-b\in Q$

$\boxed{\text{解析}}$：(A)（○） (B)（╳）：例，$a=0, b=\sqrt{2} \Rightarrow a\times b=0\in Q$。
(C)（╳）：例，$a=-\sqrt{2}, b=\sqrt{2} \Rightarrow a+b=0\in Q$。
(D)（╳）：例，$a=\sqrt{2}, b=\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{a}{b}=1\in Q$。
(E)（○）
故答案為(A)(E)。

二. 填充題 (每題 10 分)

1、設 $a,b\in Q$，若 $(1+\pi)a+2b(3-4\pi)=13-15\pi$ 則 $a=$______ , $b=$______。

答案：1, 2

解析：$(a+6b)+(a-8b)\pi=13-15\pi$

$\therefore a+6b=13, a-8b=-15$

$\therefore a=1, b=2$

2、不等式$|2x-1|<5$的解為________。

答案：$-2<x<3$

解析：$-5<2x-1<5,\ \ -2<x<3$

3、若$a=\dfrac{47}{59}, b=\dfrac{31}{43}, c=\dfrac{17}{29}$，則 a,b,c 之大小關係為____________

答案：$a>b>c$

解析：$\because a$，b，c 中分子皆比分母小 12，

$\therefore$當此分數分子與分母愈大時，其值愈大。故$a>b>c$。

4、設$a=\sqrt{7}-\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{2}-1$，$c=\sqrt{6}-\sqrt{3}$，則三數之大小關係為_____________。

答案：$b>a>c$

5、設$\sqrt{17+2\sqrt{72}}$的整數部分為 a，小數部分為 b，則$\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+b}=$_______。

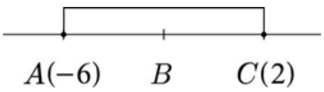
答案：$\dfrac{7-3\sqrt{2}}{2}$

解析：$\sqrt{17+2\sqrt{72}}=\sqrt{9}+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$，整數部分為 5

$b=2\sqrt{2}-2\ \ \therefore\ \dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-2}+\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}=\dfrac{7-3\sqrt{2}}{2}$

6、設$a,b\in R$，若$|ax-4|\le b$之解為$-6\le x\le 2$，求數對$(a,b)=$_______。

答案：$(-2,8)$

解析：


令$A(-6)$, $C(2)$，故 A,C 之中點$B(\dfrac{-6+2}{2})=B(-2)$。

$\therefore -6\le x\le 2\Leftrightarrow |x+2|\le 4\Leftrightarrow \left|-\dfrac{1}{2}(-2x-4)\right|\le 4\Leftrightarrow |-2x-4|\le 8$

得$a=-2$, $b=8$　　故$(a,b)=(-2,8)$。

7、滿足不等式$4\le|3x-2|<11$的 x 值之範圍為 _______ 或 _______。

答案：$2\le x<\dfrac{13}{3}, -3<x<\dfrac{-2}{3}$

解析：$4\le|3x-2|<11$

$\therefore 4\le 3x-2<11$或$-11<3x-2\le -4$

$\therefore 2\le x<\dfrac{13}{3}$或$-3<x\le\dfrac{-2}{3}$

8、設$a,b,c\in Z$ 且$3|a+5|+4|b-1|+|c-3|=2$，求數對$(a,b,c)=$__________或__________。

答案：$(-5,1,1)$ ； $(-5,1,5)$

$\boxed{解析}$：$\because a,b,c\in\mathbb{Z}, \therefore |a+5|,|b-1|,|c-3|\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$$\therefore \begin{cases}|a+5|=0\\|b-1|=0\\|c-3|=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-5\\b=1\\c=1\text{或}5\end{cases}\qquad\therefore (a,b,c)=(-5,1,1)\text{ 或 }(-5,1,5)\text{ 。}$$

9、設 $x\in N$ ， $f(x)$ 表 $\sqrt{x}$ 的整數部分，則 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(49)=$______ 。

$\boxed{答案}$：210

$\boxed{解析}$：1 至 49 中完全平方數有 1,4,9,16,25,36,49。

$$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(49)=1\times3+2\times5+3\times7+4\times9+5\times11+6\times13+7\times1$$
$$=3+10+21+36+55+78+7=210\text{ 。}$$

10、將 $3.12\overline{78}$ 化為分數時，其值為______ 。

$\boxed{答案}$：$3\dfrac{211}{1650}$

$\boxed{解析}$：$3.12\overline{78}=3+\dfrac{1278-12}{9900}=3\dfrac{211}{1650}$

11、 $a,b\in\mathbb{Q}$，若 $(a-3)+(b+2)\sqrt{3}=0$ ，則數對(a, b)=______ 。

$\boxed{答案}$：$(3,-2)$

$\boxed{解析}$： $a-3=0$ 且 $b+2=0\Rightarrow a=3,b=-2$ 故 $(a,b)=(3,-2)$

12、若 $\sqrt{33-20\sqrt{2}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b， 則 $\dfrac{1}{a-b}$ =___________ 。

$\boxed{答案}$： $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}$

13、有一既約正分數，其分子與分母之和為 80，將其化為小數並用四捨五入法計算後得 0.7，則此既約分數為______ 。

$\boxed{答案}$： $\dfrac{33}{47}$

$\boxed{解析}$：設分子 a 分母 b， $a+b=80$ $\qquad 0.65\le\dfrac{a}{b}<0.75 \quad \therefore 0.75b>a\ge0.65b$

$\therefore 1.75b>a+b\ge1.65b \quad \therefore 1.75b>80\ge1.65b$

$\therefore 45.7\cdots<b<48.4\cdots \quad \therefore b=46(\text{不合}),\ 47,\ 48(\text{不合})$

$\therefore b=47, a=33,$ 分數為 $\dfrac{33}{47}$。

14、若 $-2\le a\le3,\ 1\le b\le4$ ，則 ab 的範圍______ 。

$\boxed{答案}$： $-8\le ab\le12$

$\boxed{解析}$： $-2\le a\le3,\ 1\le b\le4,\ -8\le ab\le12$

15、 $a,b\in Q$，且 $(1-\sqrt{2})a+(4+5\sqrt{2})b=11+7\sqrt{2}$ 則 $a=$______ , $b=$______ 。

$\boxed{答案}$：3, 2

$\boxed{解析}$： $(a+4b)+\sqrt{2}(-a+5b)=11+7\sqrt{2} \qquad \therefore a+4b=11,\ -a+5b=7 \therefore a=3,b=2$

16、令 $a=\sqrt{11-2\sqrt{18}}$ 已知 a 的整數部分為 n，小數部分為 α ，求 $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{\alpha}=$______ 。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{解析}$：$a=\sqrt{11-2\sqrt{18}}=\sqrt{9}-\sqrt{2}=3-\sqrt{2}$，$a$ 的整數部分爲 1，小數部分爲 $2-\sqrt{2}$

$\therefore\ \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}=1+\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$

三. 計算與證明題 (每題 10 分)

1、(1)試證 $\sqrt{3}$ 爲無理數。

(2)利用(1)試證 $\sqrt[3]{7}+\sqrt{3}$ 亦爲無理數。

$\boxed{答案}$：(1) 設 $\sqrt{3}\in Q$ 存在 $p,q\in Q$，使 $\sqrt{3}=\dfrac{q}{p}$ 且 $\gcd(p,q)=1$

$\therefore 3p^2=q^2\Rightarrow 3\left|q^2\right.\Rightarrow 3\left|q\right.\Rightarrow$ 存在 $k\in\mathbb{N}$ 使 $q=3k\ \ \therefore 3p^2=9k^2$

$\therefore p^2=3k^2\therefore 3\left|p^2\right.\Rightarrow 3\left|p\right.\Rightarrow 3\left|\gcd(p,q)\right.$ 與所設條件矛盾 $\therefore\sqrt{3}$ 爲無理數

(2)令 $\alpha=\sqrt[3]{7}+\sqrt{3}\in Q$，$\therefore\sqrt[3]{7}=\alpha-\sqrt{3}\therefore 7=\alpha^3-3\sqrt{3}\alpha^2+9\alpha-3\sqrt{3}$

$3\sqrt{3}(\alpha^2+1)=\alpha^3+9\alpha-7\therefore\sqrt{3}=\dfrac{\alpha^3+9\alpha-7}{3(\alpha^2+1)}$

$\because\alpha\in Q\ \Rightarrow\sqrt{3}\in Q$ 與假設相矛盾 $\therefore\sqrt[3]{7}+\sqrt{3}$ 爲無理數