高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.10.06					
範圍	2-1 整數+Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 單一選擇題 (每題 5 分)

1、(B) 設 $n\in N$，若 $1\le n\le 200$ 且 $\gcd(n,\ 12)=2$，則合於條件之 n 值共
(A) 16 (B) 33 (C) 50 (D) 67 (E) 100

解析：$1\le n\le 200$，又 $\gcd(n,\ 12)=2$
$\therefore$ 令 $n=2k,\ 1\le k\le 100,\ \gcd(k,\ 6)=1$
1～100 中 2 倍數 50 個，3 倍數 33 個，6 倍數 16 個
$\therefore 100-50-33+16=33$

2、(D) 下列何者是 2^{100} 除以 10 的餘數？ (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

解析：此題底數爲 2，所以利用循環找餘數
觀察：$2^1\div 10$ 餘 2
$2^2\div 10$ 餘 4
$2^3\div 10$ 餘 8
$2^4\div 10$ 餘 6
$2^5\div 10$ 餘 2
$2^6\div 10$ 餘 4
每四次爲一循環，又 $2^{100}=(2^4)^{25}$ $\therefore$ 餘數爲 6，故選(D)

3、(D) 試問有多少個正整數 n 使得 $\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{10}{n}$ 爲整數？
(A) 1 個 (B) 2 個 (C) 3 個 (D) 4 個 (E) 5 個

解析：令 $\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{10}{n}=P\Rightarrow\frac{1+2+\cdots+10}{n}=P\Rightarrow\frac{55}{n}=P$
因爲 n 爲正整數，P 爲整數，所以 $n\mid 55$，則 $n=1,5,11,55$。

4、(E) 設八位數 $3174a9b4$ 爲 72 之倍數，則 a 之值可爲 (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

解析：$\because 3174a9b4$ 爲 8 的倍數,$\therefore b=0$ 或 4 或 8
$\because 3174a9b4$ 爲 9 的倍數,$\therefore 9|28+a+b$,$\therefore a+b=8$ 或 $a+b=17$
$\therefore (a,b)=(8,\ 0),(4,\ 4),(0,\ 8),(9,\ 8)$

5、(B) 在 230 與 240 之間共有多少個質數？ (A) 1 個 (B) 2 個 (C) 3 個 (D) 4 個 (E) 5 個

解析：從 231,⋯, 239 中去掉 2 與 5 的倍數；剩下 231, 233, 237, 239
再扣掉 3 的倍數 231, 237，剩下 233 與 239
比 $\sqrt{233}$ 與 $\sqrt{239}$ 小質數 2, 3, 5, 7, 11, 13,不爲 233 與 239 的因數；233 與 239 爲質數。

6、(D) 計算 $\gcd(4^2\times 6\times 9^2\times 11^2,\ 6^2\times 11\times 15\times 33)=$
(A) 1 (B) 6×11 (C) $2^2\times 3^3\times 11$ (D) $2^2\times 3^4\times 11^2$ (E) $2^5\times 3^5\times 5\times 11^2$

解析：$4^2\times 6\times 9^2\times 11^2=2^5\times 3^5\times 11^2$
$6^2\times 11\times 15\times 33=2^2\times 3^4\times 5\times 11^2$

7、($\frac{\text{BC}}{\text{D}}$) (複選)下列各數何者爲 9 的倍數？
(A) 23574891 (B) 12^{12} (C) 612×372 (D) 270^3-171^3 (E) $10^{100}+1$

解析：(A)（╳）：$2+3+5+7+4+8+9+1=39$ 不爲 9 的倍數。
(B)（○）：$12^{12}=12^2\times 12^{10}=(2^2\times 3)^2\times 12^{10}=9\times 2^4\times 12^{10}$。

(C)（○）：$612\times372=9\times68\times372$。

(D)（○）：$270^3-171^3=(270-171)(270^2+270\times171+171^2)$

$=99\times(270^2+270\times171+171^2)$

$=9\times11\times(270^2+270\times171+171^2)$。

(E)（╳）：$10^{100}+1$的數字和爲 2，不爲 9 的倍數。

故答案爲(B)(C)(D)。

二. 填充題 (每題 10 分)

8、設$n\in N$，若$2n+3|5n,\ \ n-1|2n-7$，則$n=$______。

答案：6

解析：$2n+3|5n,\ \ 2n+3|2n+3\Rightarrow 2n+3|15$

$n-1|2n-7,\ \ n-1|n-1,\ \ n-1|5$

$\Rightarrow n=6$

9、設$n\in N$，以 x 除 1206 餘 10，以 x 除 953 餘 17，則 x 之值爲______。(答案不止一個，全部列出才給分)

答案：26,52

解析：$x|1196,\ \ x|936\Rightarrow x|52\Rightarrow x=1,\ 2,\ 4,\ 13,\ 26,\ 52$但餘數爲 17，故 x = 26 或 52。

10、設$a,b\in N$且滿足$ab-8a-2b=-29$，則$a+b=$______。

答案：22

解析：原式$\Rightarrow a(b-8)-2(b-8)=-29+16$

$\therefore (a-2)(b-8)=-13$

$\therefore \begin{cases}a-2=-1\\b-8=13\end{cases}$或$\begin{cases}a-2=13\\b-8=-1\end{cases}$或$\begin{cases}a-2=1\\b-8=-13\end{cases}$（不合）或$\begin{cases}a-2=-13\\b-8=1\end{cases}$（不合）

$\therefore \begin{cases}a=1\\b=21\end{cases}$或$\begin{cases}a=15\\b=7\end{cases}$

$\therefore a+b=22$。

11、(1)利用輾轉相除法求$\gcd(3818,4316)=$_________。

(2)找一組整數x,y使 (3818, 4316) = 3818x + 4316y 則序對 (x, y) =__________。

答案：(1)166　(2) $(x,y)=(-9,8)$

解析：

a $-7a+7b$	3818 3486	4316 3818	b a
$8a-7b$	332 332	498 332	$-a+b$ $8a-7b$
	0	166	$-9a+8b$

12、設$n=2^7\times3^4\times5^3$的正因數中爲完全平方數的共有______個，又其總和爲______。

答案：24,201110

解析：正因數爲完全平方數$\Rightarrow$由 $\begin{matrix} 2^0 3^0 5^0 \\ 2^2 3^2 5^2 \\ 2^4 3^4 \\ 2^6 \end{matrix}$ 組成，$\therefore$個數$4\times 3\times 2=24$個

總和$(2^0+2^2+2^4+2^6)(3^0+3^2+3^4)(5^0+5^2)=201110$

13、設$n\in N$且$\dfrac{3n+17}{2n-3}\in N$，求$n=$_________。

答案：2 或 23

解析：$\because \begin{matrix} 2n-3 \mid 2n-3 \\ 2n-3 \mid 3n+17 \end{matrix} \Rightarrow 2n-3 \mid 2(3n+17)-3(2n-3)=43$

$\therefore 2n-3=1$或43

$\therefore n=2$或23（代入皆合）。

14、有 280 個梨子均分給若干個兒童，最後剩下 16 個；除此之外，另有 880 個蘋果也是均分給這些兒童，最後剩下 22 個，試問兒童有_____________人。

答案：33 或 66

解析：設兒童有x人（$x>22$）

$(280-16)$被 x 整除$\Rightarrow x\mid 264$

$(880-22)$被 x 整除$\Rightarrow x\mid 858$

$\therefore x$ 是 $264,858$ 之公因數。

先求 $264, 858$ 之最大公因數

$$\begin{array}{r|r|r|l} 4 & 264 & 858 & 3 \\ & 264 & 792 & \\ \hline & 0 & 66 & \end{array}$$

$\therefore \gcd(264, 858)=66$

又$x\mid 66$且$x>22$，$\therefore x=33$或66，故兒童有 33 或 66 人。

15、設$a,b,q_1,q_2,q_3\in N$且滿足$\begin{cases} a=bq_1+4098 \\ b=4098q_2+582 \\ 4098=582q_3+24 \end{cases}$，求$a,b$的最大公因數爲______。

答案：6

解析：$(a,b)=(b,4098)=(4098,582)=(582,24)=6$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 582 & 24 \\ \hline 3 & 291 & 12 \\ \hline & 97 & 4 \end{array}$$

16、設a除以 11 餘 3，b除以 11 餘 1，c除以 11 餘 4，則

(1)$a+b+c$除以 11 之餘數爲______，　(2)a^6除以 11 之餘數爲______。

答案：8,3

解析：(1) $11\mid a-3,\ 11\mid b-1,\ 11\mid c-4\Rightarrow 11\mid a+b+c-8$

故$a+b+c$除以 11 餘 8。

(2)$a\div 11\cdots\cdots 3, a^4\div 11\cdots\cdots 4$

$a^2\div 11\cdots\cdots 9, a^5\div 11\cdots\cdots 1$

$a^3\div 11\cdots\cdots 5, a^6\div 11\cdots\cdots 3$

故a^6除以 11 餘 3。

17、設 $a,b\in N$ 且 $a>b,\ a+b=1606$, $\mathrm{lcm}(a, b) = 2628$ 則 $\gcd(a,b) =$______，又 $a =$ ______。

$\boxed{答案}$：146,1314

$\boxed{解析}$：設 $\gcd(a,b)=d,\ a=dh,\ b=dk,\ \gcd(h,k)=1$

$\Rightarrow \gcd(h+k,hk)=1\quad \therefore \gcd(a+b,\mathrm{lcm}(a,b))=d,\ d=\gcd(1606,2628)=146$

$\Rightarrow h+k=11,\ hk=18$ 又 $h>k\quad \therefore h=9,\ k=2$

$\therefore a=9\times 146=1314$

18、設 $n=2^2\times 3\times 5^3\times 7$ 的正因數中爲 75 的倍數的共有______個，其總和爲______。

$\boxed{答案}$：12,25200

$\boxed{解析}$：$n=2^2\times 3\times 5^3\times 7$ 的正因數中合乎條件者共 $3\times 1\times 2\times 2=12$ 個

其和 $=(2^0+2^1+2^2)(3^1)(5^2+5^3)(7^0+7^1)=25200$

19、韓信點兵，兵不滿一萬人，每 6 人一數，7 人一數，9 人一數，都餘 1 人，則士兵最多有______人。

$\boxed{答案}$：9955

$\boxed{解析}$：設士兵 x 人, $6|x-1,\ 7|x-1,\ 9|x-1$

$\therefore x-1 = \mathrm{lcm}(6,7,9)$的倍數，$\therefore x-1 = 126k$ ，取 $k=79$ 得 $x=9955$

20、設 $a,b\in N$ 且已知 $\dfrac{a-68}{b-85}=\dfrac{a}{b},(a,b)=6$ ，試求 $a=$_____， $b=$_____。

$\boxed{答案}$：24 ; 30

$\boxed{解析}$：$\dfrac{a-68}{b-85}=\dfrac{a}{b}$

$\cancel{ab}-68b=\cancel{ab}-85a$

$a:b=(-68):(-85)=4:5$

令 $\begin{cases} a=4k \\ b=5k \end{cases}, k\in N$

又 $(a,b)=k=6$

$\therefore a=24, b=30$ 。

22、設 $a, b, c\in N$ 且 $a:b:c=\ 8:12:9$ 又 $\gcd(a,b,c) + \mathrm{lcm}(a,b,c) = 803$ 則 $\gcd(a,b,c) =$ ______，又 $a =$______。

$\boxed{答案}$：11,88

$\boxed{解析}$：$a=8k,\ b=12k,\ c=9k$

$$\begin{array}{r|rrr} k & 8k & 12k & 9k \\ \hline 4 & 8 & 12 & 9 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 9 \\ \hline & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

$\therefore \gcd(a,b,c) = k$

$\mathrm{lcm}(a,b,c) = 36k$

$37k=803 \quad \therefore k=11$

故 $a=8\times 11=88$

23、設正整數 m, n，有 $m>1$ 且 $m\,|\,21n+5,\ m\,|\,7n+3$ 則 m 之值爲________。(答案不止一個全部答對才給分)

$\boxed{答案}$：2,4

$\boxed{解析}$：$m\big|21n+5,\ m\big|7n+3 \Rightarrow m\big|(21n+5)-3(7n+3)$

$\therefore m\big|4 \quad \therefore m=2,\ 4\ (\because m>1,\ m\in N)$

24、設 n 爲自然數，且 $n\le 200$ ，若$(n, 36) = 6$ 則合於條件之 n 值共_______個。

$\boxed{答案}$：11

$\boxed{解析}$：$n\in N$，$n\le 200,\ (n,\ 36)=6$ ，令 $n=6k \Rightarrow (k,\ 6)=1$

$1\le k\le 33,\ 33-16-11+5=11$

25、設 $a\in N$ ，若以 a 分別除 1112, 2139, 3956 所得的餘數都爲相同正整數，則 a =_______，又其餘數 r =_______。

$\boxed{答案}$：79,6

$\boxed{解析}$：$\because$餘數均相同$\therefore a\big|2139-1112$ 且 $a\big|3956-2139 \therefore a\big|1027\ a\big|1817$

$\because a\big|(1027,1817) \therefore a\big|79 \therefore a=1$ 或 79，$\because a=1$ 不合，$\therefore a=79$

$1112\div 79=14\cdots\cdots 6 \therefore r=6$

26、設 $x=3600$，則 x 的正因數中

(1)爲完全平方數的有______個。(2)其和爲________。

$\boxed{答案}$：(1)12　　(2)5460

$\boxed{解析}$：$x=3600=2^4\times 3^2\times 5^2$

(1)種類有 $2^0\ 3^0\ 5^0$

$2^2\ 3^2\ 5^2$

2^4

$\therefore$有 $3\times 2\times 2=12$（個）。

(2)總和 $=(2^0+2^2+2^4)(3^0+3^2)(5^0+5^2)$

$=5460$ 。

27、設 a, b 爲兩正整數，且 $40<a<b$ ，又 gcd(a, b) = 31，lcm(a, b) = 1488，則 a = _______, b = _______。

$\boxed{答案}$：93, 496

$\boxed{解析}$：$40 < a < b$

$a=31\times h,\ b=31\times k$ 且 $\gcd(h,k)=1$

$\because \mathrm{lcm}(a,b)=1488=31\times h\times k \quad \therefore hk=48$

$\therefore h=1, k=48$ (不合) $h=3,\ k=16 \quad \therefore a=93,\ b=496$

28、 $2^{20}-1$ 與 $2^{19}+1$ 的最大公因數爲_______。

$\boxed{答案}$：3

$\boxed{解析}$：1. 設最大公因數爲 d

則 $d\,|\,2^{20}-1,\ d\,|\,2^{19}+1 \Rightarrow d\,|\,(2^{19}+1)\cdot 2-(2^{20}-1)\times 1$

$\Rightarrow d\,|\,3 \Rightarrow d=1$ 或 3

$2.\because 2^{20}-1=(2^2)^{10}-1=4^{10}-1=(4-1)(4^9+4^8+\cdots+1)=3\times(4^9+\cdots+1)$

$2^{19}+1=(2+1)(2^{18}-2^{17}+\cdots+1)=3\times(2^{18}-\cdots+1)$

∴有公因數 3

由 1.，2.可知，最大公因數為 3

29、設$n\in N$，n 以 3 除之餘 2，n 以 5 除之餘 2，n 以 7 除之餘 5，求正整數 n 的最小值為何？

答案：令$n=[3,5,7]\times a+[3,5]\times b+3c+2$

$5\mid(3c+2)-2\Rightarrow c=0$

$7\mid(15b+2)-5\Rightarrow 7\mid b-3\Rightarrow b=3$

$\therefore h=105a+47$

故最小值為 47。

30、自然數 7200 共有幾個正因數？這些正因數之和為多少？

答案：由$7200=72\times100=(8\times9)\times(2\times5)^2=2^5\times3^2\times5^2$

知 7200 的正因數共有$(5+1)(2+1)(2+1)=54$個。

這些正因數之和為

$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+3+3^2)(1+5+5^2)=25389$

31、若正整數 x, y 滿足$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$，求數對$(x, y)$ =?(合於條件者全部列出)

答案：$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\therefore 2y+2x=xy,\ (x-2)(y-2)=4$

$4=1\times4=(-1)\times(-4)$

$=2\times2=(-4)\times(-1)$

$=4\times1=(-2)\times(-2)$

$\Rightarrow(x, y)=(3, 6)(4, 4)(6, 3)$

32、我國陰曆以天干「甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸」，地支「子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥」紀年，即甲子、乙丑、丙寅、丁卯、……、癸酉、甲戌、乙亥、……、癸未、甲申、……。譬如西元 2001 年就是「辛巳」年。問

(1)為甚麼 60 年為一週期？（俗稱 60 年為一甲子）

(2)西元 3000 年陰曆紀年是甚麼年？

(3)離西元 2001 年最近的「丙辰」年是西元幾年？

答案：(1)天干 10 年一輪，地支 12 年一輪，10 和 12 的最小公倍數為 60 年為一周期。

(2)把天干從 1 到 10 逐一加以編號，也把地支從 1 到 12 逐一加以編號，西元 2001 年的「辛巳」就是(8, 6)。

$3000-2001=999$。西元 3000 年的陰曆紀元就是

$(8+999,6+999)=(1007,1005)=(10\times100+7,12\times83+9)\Rightarrow(7,9)=$「庚申」。

(3)設 x 年後為「丙辰」年，即(3, 5)年，而 2001 年是(8, 6)年。

所以$8+x=10a+3$，$6+x=12b+5$。得$x=10a-5=12b-1$。

$5a-6b=2,\quad a=\frac{6b+2}{5}=b+\frac{b+2}{5}$。

取$b=3$（當然也可取$b=-2$），得$a=4, b=3,\quad x=10\times4-5=35,$

此後 35 年是丙辰年。　$60-35=25,$

33、設 a, b 皆為正整數，$a<b$，a 不是 b 的因數。若$\gcd(a,\ b)=29,\ \operatorname{lcm}(a,\ b)=10440$，試求 a, b 之值。

答案：$\gcd(a,\ b)=29$，令 $a=29c,\ b=29d$，其中 $1<c<d$ 且 $c,\ d$ 互質。

$\text{lcm}(a,\ b) = 29cd = 10440$ ………… (1)

$cd = \dfrac{10440}{29} = 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \cdots\cdots (2)$

由(1), (2)得 $c = 5,\ \ d = 72$ 或 $c = 8,\ \ d = 45$ 或 $c = 9,\ \ d = 40$

34、設 x 爲正整數，且 $\sqrt{x^2+12}$ 亦爲正整數，求 $x = ?$

答案：令 $p = \sqrt{x^2+12} \in N \Rightarrow p^2 - x^2 = 12$

$(p+x)(p-x) = 12$

$12 = 12\times 1 = 6\times 2 = 4\times 3$

$\because p \in N$, $x \in N \Rightarrow p = 4,\ x = 2$