

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：93.09.20	
範圍	1-1、2	班級		姓名		
	邏輯集合+Ans	座號				

一. 多重選擇題 (每題 5 分)

- 1、( <sup>AD</sup> E ) (複選) 設「若  $f(x)=1$  則  $g(x)=0$ 」為錯，則下列何者為對？ (A)  $f(x)=1$  或  $g(x)=0$  (B)  $f(x)=1$  且  $g(x)=0$  (C)  $f(x) \neq 1$  或  $g(x)=0$  (D)  $f(x)=1$  且  $g(x) \neq 0$  (E)  $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x)=1$

**解析**：∵  $f(x)=1 \Rightarrow g(x)=0$  為錯  
 ∴  $f(x)=1$  對 且  $g(x)=0$  錯  
 故(A)，(D)，(E)為對

- 2、(BE) (複選) 下列敘述何者正確？ (A)  $(a-b)(b-c)(c-a)=0$  為  $a=b=c$  的充要條件 (B)  $x > 1$  為  $x=2$  的必要非充分條件 (C)  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$  為  $a > b$  的充要條件 (D) 對四邊形而言，對角線互相垂直是菱形的充要條件 (E)  $a \neq b$  為  $a^2 \neq b^2$  的必要非充分條件

- 3、(AC) (複選) 下列敘述中那些是正確的？

- (A) 設  $a, b \in R$ ，則  $a^2 + b^2 = 0$  是  $a=0$  且  $b=0$  的充分非必要條件  
 (B) 設  $a, b \in R$ ，則  $ab=0$  是  $a=0$  且  $b=0$  的充分非必要條件  
 (C)  $x=1$  或  $x=-2$  是  $(x-1)(x+2)=0$  的充要條件  
 (D)  $x > 5$  是  $x > 1$  的必要非充分條件  
 (E) 設  $a, b \in R$ ，則  $a+b\sqrt{2}=0$  是  $a=b=0$  的必要非充分條件

**解析**：(A)(○)：  $a, b \in R, a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a=0$  且  $b=0$ 。  
 (B)(×)：  $a, b \in R, ab=0 \Leftrightarrow a=0$  或  $b=0$   
 ∴  $a=0$  且  $b=0$  為  $ab=0$  的充分非必要條件。  
 (C)(○)：  $(x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=1$  或  $x=-2$ 。  
 (D)(×)： ∵  $x > 5 \Rightarrow x > 1$ ，但  $x > 1 \not\Rightarrow x > 5$   
 ∴  $x > 5$  為  $x > 1$  的充分非必要條件。  
 (E)(×)： ∵  $a, b \in R, \therefore a=b=0 \Rightarrow a+b\sqrt{2}=0$   
 但  $a+b\sqrt{2}=0 \not\Rightarrow a=b=0$  (例：  $a=-\sqrt{2}, b=1$ )  
 ∴  $a+b\sqrt{2}=0$  為  $a=b=0$  的必要非充分條件。  
 故答案為(A)(C)

- 4、( <sup>BD</sup> E ) (複選)  $\triangle ABC$  中， $\overline{BC}=a, \overline{CA}=b, \overline{AB}=c$ ，下列敘述何者為真？ (A) 若  $\triangle ABC$  為直角三角形，則  $a^2 = b^2 + c^2$  (B) 若  $\triangle ABC$  為正三角形，則  $\triangle ABC$  為等腰三角形 (C) 若  $\triangle ABC$  為等腰三角形，則  $a=b$  (D)  $\triangle ABC$  中， $a^2 > b^2 + c^2$  為  $\angle A > 90^\circ$  的充要條件 (E) 若  $a=b=c$ ，則  $\angle A = \angle B = \angle C$

**解析**：(A)(×)：若  $\triangle ABC$  為直角三角形，則  $a^2 = b^2 + c^2$  或  $b^2 = a^2 + c^2$  或  $c^2 = a^2 + b^2$ 。  
 (B)(○)：正三角形必為等腰三角形。  
 (C)(×)：若  $\triangle ABC$  為等腰三角形，則  $a=b$  或  $b=c$  或  $a=c$ 。  
 (D)(○)：  $a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow \angle A > 90^\circ$ 。  
 (E)(○)：  $a=b=c \Leftrightarrow \triangle ABC$  為正三角形  $\Leftrightarrow \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ 。  
 故答案為(B)(D)(E)。

## 二. 填充題 (每題 10 分)

5、已知命題「若  $2x+3y=7$ ，則  $3x-y \neq 5$ 」是錯的，求數對  $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**答案**：(2,1)

**解析**：若  $2x+3y=7$ ，則  $3x-y \neq 5$  的命題是錯誤的

$$\therefore \begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x-y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}, \therefore (x, y) = (2, 1)。$$

6、填入適當的答案：(充分、必要、充要)

(1)「若四邊形  $ABCD$  為長方形」為「四邊形  $ABCD$  為正方形」的\_\_\_\_\_條件。

(2)在  $\triangle ABC$  中， $D$  為  $\overline{BC}$  的中點，「 $\angle A = 90^\circ$ 」為「 $\overline{BD} = \overline{CD} = \overline{AD}$ 」的\_\_\_\_\_條件。

(3)四邊形  $ABCD$  中，「 $\angle BAC = \angle BDC$ 」為「 $ABCD$  四點共圓」的\_\_\_\_\_條件。

(4)「 $a=0$ 」為「 $ab=0$ 」的\_\_\_\_\_條件。

(5)「 $ab>0$ 」是「 $a>0$ 且 $b>0$ 」的\_\_\_\_\_條件。

**答案**：(1)必要 (2)充要 (3)充要 (4)充分 (5)必要

**解析**：(1)為必要條件， $ABCD$  為正方形，則必為長方形，反之不正確。

(2)為充要條件， $\because \angle A = 90^\circ$ ， $D$  為  $\overline{BC}$  中點，則  $\overline{BD} = \overline{CD} = \overline{AD}$ ，又若  $\overline{BD} = \overline{CD} = \overline{AD}$  可得  $\angle A = 90^\circ$

(3)為充要條件， $ABCD$  四點共圓，則  $\angle BAC = \angle BDC$ ，反之亦成立。

(4)為充分條件， $\because a=0 \Rightarrow ab=0$ ，但  $3 \times 0 = 0$ ，此時  $3 \neq 0$ 。

(5)「 $a>0$ 且 $b>0$ 」 $\Rightarrow$ 「 $ab>0$ 」

7、設  $x \in \mathbb{R}$ ，若  $|x-3| \leq 4$  是  $|x| \leq k$  的必要條件，則  $k$  的最大值為\_\_\_\_\_。

**答案**：1

**解析**： $|x-3| \leq 4 \Rightarrow -1 \leq x \leq 7$  (設為集合  $A$ )

$|x| \leq k \Rightarrow -k \leq x \leq k$  (設為集合  $B$ )

$\because |x-3| \leq 4$  為  $|x| \leq k$  的必要條件，即  $|x| \leq k \Rightarrow |x-3| \leq 4$

$$\Rightarrow B \subset A, \begin{cases} -k \geq -1 \\ k \leq 7 \end{cases} \Rightarrow k \leq 1, \therefore k \text{ 的最大值為 } 1。$$

8、命題甲：「若  $x=3$ ，則  $x^2-5x+7=0$ 」；命題乙：「若  $x=2$ ，則  $x^2-3x+2=0$ 」，則

(1)命題甲是否為真？\_\_\_\_\_。

(2)命題乙的逆命題：\_\_\_\_\_。

**答案**：(1)否 (2)若  $x^2-3x+2=0$ ，則  $x=2$

**解析**：(1)當  $x=3$ ，則  $x^2-5x+7=9-15+7=1 \neq 0$ ，結論不成立，所以命題甲不真。

(2)命題乙的逆命題：若  $x^2-3x+2=0$ ，則  $x=2$ 。

9、設  $a, b$  皆為實數。試寫出下列命題之逆命題、否定命題、對偶命題，並說明逆命題是否為真？「若  $a>b>0$ ，則  $a^2>b^2$ 。」。

**答案**：逆命題：若  $a^2>b^2$ ，則  $a>b>0$ 。

否定命題：若  $a \leq b$  或  $b \leq 0$ ，則  $a^2 \leq b^2$ 。

對偶命題：若  $a^2 \leq b^2$ ，則  $a \leq b$  或  $b \leq 0$ 。

逆命題不真，因為  $(-5)^2 > 3^2$ ，但  $-5 > 3$  不成立。

10、設  $n$  為一自然數，試證若  $n^2$  為 3 的倍數時，則  $n$  為 3 的倍數。

**答案**：假設  $n$  不為 3 的倍數，則  $n$  必為  $3k \pm 1$  ( $k$  為自然數或 0)

當  $n = 3k \pm 1$  時， $n^2 = (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$  與  $n^2$  為 3 的倍數不合  
 $\therefore$  由(1)(2)知  $n$  為 3 的倍數。

11、設  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，請問  $S$  的子集共有幾個？\_\_\_\_\_。

**答案**：  $S$  所含元素之個數為 5， $S$  的子集為  $2^5 = 32$

12、設集合  $A = \{(x, y) | 2x + y = 3\}$ ,  $B = \{(x, y) | x - 3y = 5\}$ ,  $C = \{(y + 2, x - 1) | 2x - y = 3\}$  則

$$A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}, B \cap C = \underline{\hspace{2cm}}。$$

**答案**：  $\{(2, -1)\}, \{(-7, -4)\}$

**解析**：

$$\therefore \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \quad \therefore x = 2, y = -1, \quad \therefore A \cap B = \{(2, -1)\}$$

設  $(a, b) \in B \cap C$ ,  $\therefore a - 3b = 5$

$$\begin{cases} y + 2 = a \\ x - 1 = b \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} y = a - 2 \\ x = b + 1 \end{cases}$$

$$2(b + 1) - (a - 2) = 3 \quad \therefore a - 2b = 1$$

$$\begin{cases} a - 3b = 5 \\ a - 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow -b = 4, b = -4, a = -7$$

13、設  $A = \{2, 4, a + 1\}$ ,  $B = \{-4, a - 2, a^2 - 2a - 3\}$ ，已知  $A \cap B = \{2, 5\}$ ，則  $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**答案**：  $\{2, 4, 5, -4\}$

**解析**：  $\because A = \{2, 4, a + 1\}$  且  $A \cap B = \{2, 5\}$

$$\therefore a + 1 = 5 \Rightarrow a = 4 \quad \therefore A = \{2, 4, 5\}, B = \{-4, 2, 5\} \quad \therefore A \cup B = \{2, 4, 5, -4\}。$$

14、不大於 500 的自然數中為 2 或 5 或 7 的倍數的個數共有\_\_\_\_\_個。

**答案**： 329

**解析**： 今  $A_i$  表示  $i$  的倍數所成的集合， $i = 2, 5, 7$ ；

$$n(A_2 \cup A_5 \cup A_7)$$

$$= n(A_2) + n(A_5) + n(A_7) - n(A_2 \cap A_5) - n(A_5 \cap A_7) - n(A_2 \cap A_7) + n(A_2 \cap A_5 \cap A_7)$$

$$= \left[ \frac{500}{2} \right] + \left[ \frac{500}{5} \right] + \left[ \frac{500}{7} \right] - \left[ \frac{500}{10} \right] - \left[ \frac{500}{35} \right] - \left[ \frac{500}{14} \right] + \left[ \frac{500}{70} \right]$$

$$= 250 + 100 + 71 - 50 - 14 - 35 + 7$$

$$= 329 \text{ (個)}。$$

15、設  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{a + 1, 3, 4\}$ ，若  $A = B$ ，則數對  $(a, b, c)$  有\_\_\_\_\_組解。

**答案**： 5

**解析**：  $\because A = B$  且  $a \neq a + 1 \Rightarrow a = 3$  或  $4$

(1) 若  $a = 3$  時， $A = \{3, b, c\}$ ,  $B = \{4, 3, 4\} = \{3, 4\}$ ； $\therefore (b, c) = (3, 4)$  或  $(4, 4)$  或  $(4, 3)$ 。

(2) 若  $a = 4$  時， $A = \{4, b, c\}$ ,  $B = \{5, 3, 4\}$ ； $\therefore (b, c) = (3, 5)$  或  $(5, 3)$

$\therefore (a, b, c)$  共有 5 組解。

16、若  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  為字集， $A = \{1, 2, 3, 5, 8\}$ ,  $B = \{1, 3, 6, 9\}$ ,  $C = \{2, 4, 6, 8\}$ ，試求

$$(1) A' \cap B' = \underline{\hspace{2cm}}。 \quad (2) (B \cup C) - A = \underline{\hspace{2cm}}。$$

**答案**： (1)  $\{4, 7\}$  (2)  $\{4, 6, 9\}$

**解析**：(1)  $A' = \{4, 6, 7, 9\}$ ,  $B' = \{2, 4, 5, 7, 8\} \Rightarrow A' \cap B' = \{4, 7\}$ 。

(2)  $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\} \Rightarrow (B \cup C) - A = \{4, 6, 9\}$ 。

17、設  $A = \{(x, y) | 3x + 2y = 50\}$ ，且  $x, y \in N \cup \{0\}$  則集合  $A$  的元素個數為\_\_\_\_\_個。

**答案**：9

**解析**：

$3x + 2y = 50$ ,  $\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 0 & 2 & \cdots & 16 \\ \hline y & 25 & 22 & \cdots & 1 \end{array}$  集合  $A$  中有 9 個元素。

18、(1) 若兩數對  $(x+1, y) = (3y-1, 2x-1)$ ，則  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 設  $A, B$  兩集合各有兩個元素  $A = \{x+1, y\}$ ,  $B = \{3y-1, 2x-1\}$ ，若  $A = B$  則數對  $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**答案**：(1) 1, 1      (2) (1, 1) 或  $(2, \frac{1}{2})$

**解析**：(1)  $\begin{cases} x+1 = 3y-1 \\ y = 2x-1 \end{cases} \therefore x = 1, y = 1$

(2)  $A = B$  表示  $\begin{cases} x+1 = 3y-1 \\ y = 2x-1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x+1 = 2x-1 \\ y = 3y-1 \end{cases}$

$\therefore (x, y) = (1, 1)$  或  $(2, \frac{1}{2})$