高雄市明誠中學　高二數學平時測驗　　日期：109.05.01					
範圍	三元一次聯立方程組	班級	二年____班	姓名	
		座號			

壹、填充題：每題十分

1.已知 $A\,(5\,,1)$，$B\,(1\,,3)$，$C\,(1\,,1)$，若通過 A，B，C 三點之圓方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，求序組$(d\,,e\,,f)$之值為____________．

解答　$(-6\,,-4\,,8)$

解析　圓方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，

$A\,(5\,,1)$代入得 $25+1+5d+e+f=0$，

$B\,(1\,,3)$代入得 $1+9+d+3e+f=0$，

$C\,(1\,,1)$代入得 $1+1+d+e+f=0$，

$\Rightarrow\ \begin{cases}5d+e+f=-26\cdots\cdots①\\ d+3e+f=-10\cdots\cdots②\\ d+e+f=-2\cdots\cdots③\end{cases}$，解①②③得 $d=-6$，$e=-4$，$f=8$，$\therefore (d\,,e,f)=(-6\,,-4\,,8)$．

2.已知二次函數 $f(x)$過點 $A(1,-6)$，$B(2,1)$，$C(-3,26)$，則 $f(x)=$____________．

解答　$3x^2-2x-7$

解析　設 $f(x)=ax^2+bx+c$

過$(1,-6)\Rightarrow a+b+c=-6\cdots\cdots①$

過$(2,1)\Rightarrow 4a+2b+c=1\cdots\cdots②$

過$(-3,-26)\Rightarrow 9a-3b+c=26\cdots\cdots③$

由②－①得 $3a+b=7\cdots\cdots④$

③－②得 $5a-5b=25$ 即 $a-b=5\cdots\cdots⑤$

④＋⑤得 $4a=12\Rightarrow a=3\Rightarrow b=-2$ 代入①

$3-2+c=-6\Rightarrow c=-7$　　$\therefore f(x)=3x^2-2x-7$．

3.設 $2x-3y+4z=x-y+2z=3x+y-2z$，求 $\dfrac{x+y-z}{2x-y+z}=$____________．

解答　1

解析　$\begin{cases}x-2y+2z=0\\ x+4y-6z=0\end{cases}\Rightarrow x:y:z=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 4 & -6\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2 & 1\\ -6 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=4:8:6=2:4:3$，

令 $x=2k$，$y=4k$，$z=3k$，$\therefore \dfrac{x+y-z}{2x-y+z}=\dfrac{2k+4k-3k}{4k-4k+3k}=1$．

4.解$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0\\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{z}=5\\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{4}{z}=-4\end{cases}$　得(1)$x=$____________，(2)$y=$____________，(3)$z=$____________．

解答 (1) $\frac{1}{2}$;(2)1;(3) $-\frac{1}{3}$

解析 $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0\cdots\cdots ①\\ \frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=5\cdots\cdots ②\\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}+\frac{4}{z}=-4\cdots\cdots ③\end{cases}$

① × 2 − ② $\Rightarrow -\frac{2}{x}-\frac{1}{y}=-5\cdots\cdots$④

① × 4 − ③ $\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=4\cdots\cdots$⑤

④ × 2 + ⑤ $\Rightarrow \frac{-3}{x}=-6 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ 代入④得 $y=1$，代入①得 $z=-\frac{1}{3}$ ，

$\therefore x=\frac{1}{2}$ ， $y=1$， $z=-\frac{1}{3}$ ．

5.解 $\begin{cases}6(x+y)=5xy\\ 2(y+z)=3yz\\ 3(z+x)=4zx\end{cases}$ 得$(x,y,z)=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ ．

解答 (0,0,0)或(3,2,1)

解析 (1)$xyz=0$：

當 $x=0$ 代入 $6(x+y)=5xy \Rightarrow y=0$，同理 $z=0$， $\therefore x=y=z=0$， $\therefore (x,y,z)=(0,0,0)$ ．

(2)$xyz\neq 0$：

$\begin{cases}6(x+y)=5xy\\ 2(y+z)=3yz\\ 3(z+x)=4zx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{5}{6}\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{4}{3}\end{cases}$ $\therefore$解得$(x,y,z)=(3,2,1)$ ．

由(1)(2)可得，$(x,y,z)=(0,0,0)$或$(3,2,1)$ ．

6.x、y、z 為實數，解 $\begin{cases}x(2y+z)=7\\ y(2z+x)=14\\ z(2x+y)=12\end{cases}$ 得$(x,y,z)=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ ．

解答 (1,2,3)或(−1,−2,−3)

解析 $\begin{cases}x(2y+z)=7\cdots\cdots ①\\ y(2z+x)=14\cdots\cdots ②\\ z(2x+y)=12\cdots\cdots ③\end{cases}$

① + ② + ③ $\Rightarrow 3(xy+yz+zx)=33 \Rightarrow xy+yz+zx=11\cdots\cdots$④

④ − ① $\Rightarrow yz-xy=4\cdots\cdots$⑤

④ − ② $\Rightarrow zx-yz=-3\cdots\cdots$⑥

③ + ⑥ $\Rightarrow 3zx=9 \Rightarrow zx=3$ 代入⑥得 $yz=6$，代入①得 $xy=2$，

$(zx)(yz)(xy)=36 \Rightarrow xyz=\pm 6$， $\therefore (x,y,z)=(1,2,3)$或$(-1,-2,-3)$ ．

7.方程組$\begin{cases}5x+3y-z=0\\2x+y+3z=a\\x+4y+bz=17\end{cases}$有無限多解，求(1)$a=$ ____________ .(2)$b=$ ____________ .

解答 (1) -1;(2) -58

解析 方程組有無限多解，表示$\Delta=\Delta_x=0$，

$$\Delta=\begin{vmatrix}5&3&-1\\2&1&3\\1&4&b\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow\quad 5b-8+9+1-60-6b=0\quad\Rightarrow\quad b=-58\ .$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}0&3&-1\\a&1&3\\17&4&-58\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow\quad 0-4a+153+17-0+174a=0\quad\Rightarrow\quad a=-1\ .$$

8.空間中四平面的方程式如下：$x+y+z=0$、$x+y-z=-6$、$x-y+z=8$、$x-y-z=a$，其中a為實數，若此四平面共交一點時，則a的值為____________ .

解答 2

解析 ∵三平面$x+y+z=0$、$x+y-z=-6$、$x-y+z=8$解得共同交點$(1,-4,3)$，

∴$x-y-z=a$包含$(1,-4,3)$，得出$a=2$.

9.《九章算術》是現存最早（東漢時期）的中國數學著作之一，此書收錄246個數學問題，並分為九大類，故稱「九章」. 其中「方程章」第八題為「今有賣牛二、羊五，以買十三豕，有餘錢一千；賣牛三、豕三，以買九羊，錢適足；賣羊六、豕八，以買五牛，錢不足六百 . 問牛、羊、豕價各幾何？」依此題意，一頭羊的價格為____________錢 .

解答 500

解析 設牛、羊、豬價格分別為x、y、z，則$\begin{cases}2x+5y-13z=1000\\3x-9y+3z=0\\-5x+6y+8z=-600\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1200\\y=500\\z=300\end{cases}$，

故一頭羊的價格為500錢 .

10.方程組$\begin{cases}kx+y+z=1\\x+ky+z=1\\x+y+kz=1\end{cases}$無解時，求$k=$ ____________ .

解答 -2

解析 $\Delta=\begin{vmatrix}k&1&1\\1&k&1\\1&1&k\end{vmatrix}=k^3-3k+2=(k-1)^2(k+2)$，∵$\Delta=0\Rightarrow k=1$或$-2$，

(1)$k=1$：$\begin{cases}x+y+z=1\\x+y+z=1\\x+y+z=1\end{cases}$表無限多解 .

(2)$k=-2$：$\begin{cases}-2x+y+z=1\\x-2y+z=1\\x+y-2z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x+3y=0\\-3x+3y=3\end{cases}$表無解 .

11.設三平面E_1：$x-2y+3z+4=0$，E_2：$2x-3y+4z+a=0$，E_3：$3x-4y+bz=0$交於一線，試求

(1)二元數對$(a,b)=$ ____________ .

(2)若點$P(x,y,z)$在此交線上，則$x^2+2y-2z^2$的最大值為____________ .

解答 (1)(2,5);(2) 176

解析　(1)三平面交於一線，$\therefore \Delta = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3b - 24 - 24 + 27 + 4b + 16 = 0 \Rightarrow b = 5$，

故交線為$\begin{cases} E_1：x - 2y + 3z + 4 = 0 \cdots\cdots ① \\ E_3：3x - 4y + 5z = 0 \cdots\cdots ② \end{cases}$，

由② − ① × 2 得 $x - z - 8 = 0$，令 $x = t$，$z = t - 8$ 代入②得 $y = 2t - 10$，

$\therefore$交線為$\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 10 \\ z = t - 8 \end{cases}$，$t \in \mathbb{R}$，代入 E_2 得 $2t - 3(2t - 10) + 4(t - 8) + a = 0$，

有無限多組解，故 $a = 2$，$\therefore (a,b) = (2,5)$．

(2)$x^2 + 2y - 2z^2 = t^2 + 2(2t - 10) - 2(t - 8)^2 = -(t - 18)^2 + 176 \le 0 + 176 = 176$，則最大值為 176．

12.若$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$之解為$(x,y,z) = (3,6,4)$，則$\begin{cases} 2a_1x - 3b_1y + c_1z = 4d_1 \\ 2a_2x - 3b_2y + c_2z = 4d_2 \\ 2a_3x - 3b_3y + c_3z = 4d_3 \end{cases}$之解為$(x,y,z) =$＿＿＿＿＿＿．

解答　$(6, -8, 16)$

解析　$\begin{cases} a_1(\frac{2x}{4}) + b_1(-\frac{3}{4}y) + c_1(\frac{z}{4}) = d_1 \\ a_2(\frac{2x}{4}) + b_2(-\frac{3}{4}y) + c_2(\frac{z}{4}) = d_2 \\ a_3(\frac{2x}{4}) + b_3(-\frac{3}{4}y) + c_3(\frac{z}{4}) = d_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 3 \\ -\frac{3}{4}y = 6 \\ \frac{z}{4} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -8 \\ z = 16 \end{cases}$，故$(x,y,z) = (6, -8, 16)$．

13.方程組 $x + 2y + 3z = kx$，$2x + 3y + z = ky$，$3x + y + 2z = kz$ 有異於$(0, 0, 0)$之解，則

(1)$k =$＿＿＿＿＿＿．(2)若 k 為整數，則方程組的解為＿＿＿＿＿＿．

解答　(1)6，$\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$;(2)$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$（$t$ 為實數）

解析　$\begin{cases} (1 - k)x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + (3 - k)y + z = 0 \\ 3x + y + (2 - k)z = 0 \end{cases}$，

(1)$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - k & 2 & 3 \\ 2 & 3 - k & 1 \\ 3 & 1 & 2 - k \end{vmatrix} = 0$，

$\Rightarrow \quad (1 - k)(3 - k)(2 - k) + 6 + 6 - 9(3 - k) - (1 - k) - 4(2 - k) = 0$

$\Rightarrow \quad k^3 - 6k^2 - 3k + 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k - 6)(k - \sqrt{3})(k + \sqrt{3}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 6$，$\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$．

(2)k 為整數，即 $k = 6$

$\begin{cases} -5x + 2y + 3z = 0 \cdots\cdots ① \\ 2x - 3y + z = 0 \cdots\cdots ② \\ 3x + y - 4z = 0 \cdots\cdots ③ \end{cases}$，

② × 3 − ①　$\Rightarrow$　$11x - 11y = 0$，

② × 4 + ③　$\Rightarrow$　$11x - 11y = 0$，

令 $y = t$　$\Rightarrow$　$x = t$ 代入①得 $z = t$，

$\therefore$方程組之解為$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$（$t$ 為實數）.

14.三平面為$\begin{cases} ax+y+2z=1 \\ x+ay+2z=1 \\ x+2y+az=1 \end{cases}$，若此三平面相異，而兩兩交線互相平行，則 $a=$____________ .

解答　-3

解析　兩兩交線互相平行即無解 $\Rightarrow \Delta=0$，

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=(a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=(a+3)(a^2-3a+2)=0 \Rightarrow a=-3，1，2，$$

但 $a=1$ 或 $a=2$ 表其中兩平面重合，故不合，$\therefore a=-3$.

15.空間中三平面 $E_1: x+y-z=1$、$E_2: 2x+3y+az=3$、$E_3: x+ay+3z=2$，求

(1)若三平面恰交於一點 A，則點 A 坐標為____________，（以 a 作答）

(2)若三平面兩兩交一直線且三交線互相平行，則 $a=$____________ .

解答　(1)$(1,\dfrac{1}{a+3},\dfrac{1}{a+3})$;(2) -3

解析　(1) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix}=-a^2-a+6=-(a+3)(a-2)$，

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & a \\ 2 & a & 3 \end{vmatrix}=-a^2-a+6=-(a+3)(a-2)，$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-(a-2)，\quad \Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}=-(a-2)，$$

$$\therefore (x,y,z)=(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta},\frac{\Delta_z}{\Delta})=(1,\frac{1}{a+3},\frac{1}{a+3}) .$$

(2) $a=2$ 時，$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0 \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+2z=3 \\ x+2y+3z=2 \end{cases}$有無限多解，

$a=-3$ 時，$\Delta=0$，且 Δy，$\Delta z \neq 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y-3z=3 \\ x-3y+3z=2 \end{cases}$，

$\therefore a=-3$ 時，三平面兩兩交一直線，且三交線互相平行 .

16.若$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=12 \\ x^3+y^3+z^3=28 \end{cases}$ 且 $x>y>z$，則 $x=$____________ .

解答　$1+\sqrt{3}$

解析　$\because (x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$，

$\therefore 16=12+2(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx=2$，

$\because x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$，

$\therefore 28-3xyz=4(12-2) \Rightarrow xyz=-4$，

即$\begin{cases} x+y+z=4 \\ xy+yz+zx=2 \\ xyz=-4 \end{cases}$

$\therefore x$、y、z 為 $t^3-4t^2+2t+4=0$ 的三根且 $x>y>z$，

又$(t-2)\,(t^2-2t-2)=0 \Rightarrow t=2,\ 1+\sqrt{3}\ ,\ 1-\sqrt{3}$，

17.下列圖形代表空間上三個平面相交的情形：

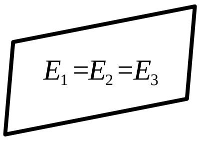

圖 1

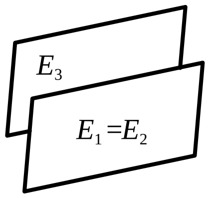

圖 2

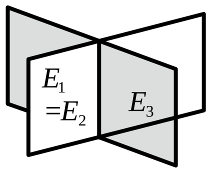

圖 3

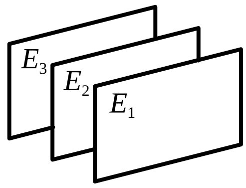

圖 4

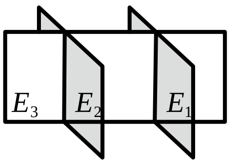

圖 5

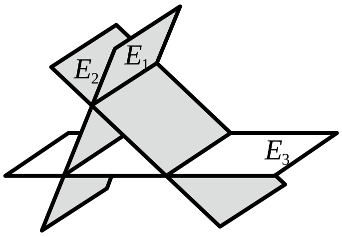

圖 6

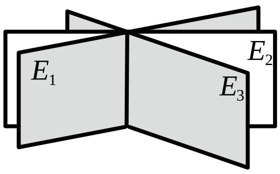

圖 7

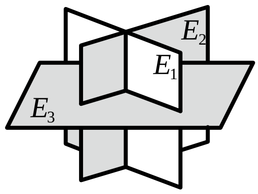

圖 8

判斷下列各方程組相交之情形：（在空格內，填入適當的圖號）

(1)$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+3z=9 \\ x+3y-z=4 \end{cases}$，圖______________ .　(2)$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+y-2z=4 \\ 2x+4y+2z=4 \end{cases}$，圖______________ .

(3)$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+2z=2 \\ 3x+y+3z=3 \end{cases}$，圖______________ .　(4)$\begin{cases} 2x-y-z=1 \\ x-2y-2z=2 \\ 4x-2y-2z=1 \end{cases}$，圖______________ .

解答　(1)8;(2)3;(3)7;(4)5

解析　(1) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=1+3+6+1-9+2=4 \Rightarrow$ 相交情形為圖 8 .

(2) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}=2-8+12-2+8-12=0$，又原方程組$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+y-2z=4 \\ x+2y+z=2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 相交情形為圖 3 .

(3) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-3+12+2+3-2-12=0$，又原方程組$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+2z=2 \\ 3x+y+3z=3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 相交情形為圖 7 .

(4) $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix}=8+8+2-8-8-2=0$，又原方程組$\begin{cases} 2x-y-z=1 \\ x-2y-2z=2 \\ 4x-2y-2z=1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 相交情形為圖 5 .

18.空間中三平面 $E_1: 2x+3y+z=2$、$E_2: 3x-2y+z=1$、$E_3: ax+by+z=1$，若三平面相交情形為其中兩平面平行與另一平面各交一線，則 $a+b=$ ____________ .

解答　5

解析　①若 $E_1 // E_3$　$\dfrac{2}{a}=\dfrac{3}{b}=\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{2}{1}\Rightarrow a=2$，$b=3\Rightarrow a+b=5$.

②若 $E_2 // E_3$　$\dfrac{3}{a}=\dfrac{-2}{b}=\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{1}$（不合，∵$E_2$ 與 E_3 重合）. 由①② $\Rightarrow a+b=5$.

19.有個三位數，其百位數字與個位數字之和等於十位數字，如果將百位數字與十位數字交換，所得之三位數較原數大 450，如果將原數的十位數字與個位數字交換，所得之三位數較原數小 27，試求此數為 ____________ .

解答　385

解析　設此數為 $100a+10b+c$，

則 $\begin{cases} a+c=b \\ 100b+10a+c=100a+10b+c+450 \\ 100a+10c+b=100a+10b+c-27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b+c=0 \\ a-b=-5 \\ b-c=3 \end{cases}$，

解得 $a=3$，$b=8$，$c=5$，故此數為 385 .

20.設 $xyz\neq 0$，若 $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{2}=\dfrac{z+x}{7}$，則 $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}$ 的值為____________ .

解答　$-\dfrac{15}{2}$

解析　令 $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{2}=\dfrac{z+x}{7}=t$

$\Rightarrow x+y=3t$，$y+z=2t$，$z+x=7t$

$\Rightarrow x+y+z=6t\Rightarrow x=4t$，$y=-t$，$z=3t$

$\therefore \dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=\dfrac{(64-1+27)t^3}{-12t^3}=-\dfrac{15}{2}$.

21.設方程組 $\begin{cases} 2x+2ay+2a^2z=0 \\ 2x+8y+32z=0 \\ 2x+34y+578z=0 \end{cases}$ 有無限多解，則 $a=$ ____________ .

解答　4 或 17

解析　齊次方程組有無限多解，則 $\Delta=0$，

$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 2a & 2a^2 \\ 2 & 8 & 32 \\ 2 & 34 & 578 \end{vmatrix}=8\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \\ 1 & 17 & 17^2 \end{vmatrix}=8(4-a)(17-a)(17-4)=0\Rightarrow a=4$ 或 17 .

22.解下列方程組：

(1) $\begin{cases} 3x-y+2z=0 \\ x-2y+z=-1 \\ 2x-9y+7z=5 \end{cases}$，$(x,y,z)=$ ____________ .

(2) $\begin{cases} x-3y-z=2 \\ 2x-y+2z=3 \\ x-8y-5z=3 \end{cases}$，$(x,y,z)=$ ____________ .

(3) $\begin{cases} x+y+z=7 \\ 2x+3y+z=9 \\ 3x+4y+5z=1 \end{cases}$，$(x,y,z)=$ ____________ .

解答 (1)$(-\frac{13}{10},\frac{11}{10},\frac{5}{2})$;(2)$(\frac{7}{5}-\frac{7}{5}t,-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}t\ ,t)$，$t$ 為實數;(3)$(22,-10,-5)$

解析 (1) $\begin{cases} 3x-y+2z=0\cdots\cdots① \\ x-2y+z=-1\cdots\cdots② \\ 2x-9y+7z=5\cdots\cdots③ \end{cases}$

$①-②\times 3 \Rightarrow 5y-z=3\cdots\cdots④$

$②\times 2-③ \Rightarrow 5y-5z=-7\cdots\cdots⑤$

由④⑤可得 $y=\frac{11}{10}$， $z=\frac{5}{2}$，代入②得 $x=-\frac{13}{10}$， $\therefore (x,y,z)=(-\frac{13}{10},\frac{11}{10},\frac{5}{2})$.

(2) $\begin{cases} x-3y-z=2\cdots\cdots① \\ 2x-y+2z=3\cdots\cdots② \\ x-8y-5z=3\cdots\cdots③ \end{cases}$

$①-③ \Rightarrow 5y+4z=-1$，

$②-①\times 2 \Rightarrow 5y+4z=-1$，

令 $z=t \Rightarrow y=-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}t$，代入①得 $x=2+3y+z=\frac{7}{5}-\frac{7}{5}t$，

$\therefore (x,y,z)=(\frac{7}{5}-\frac{7}{5}t,-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}t\ ,t)$，$t$ 為實數 .

(3) $\begin{cases} x+y+z=7\cdots\cdots① \\ 2x+3y+z=9\cdots\cdots② \\ 3x+4y+5z=1\cdots\cdots③ \end{cases}$

$②-① \Rightarrow x+2y=2\cdots\cdots④$

$①\times 5-③ \Rightarrow 2x+y=34\cdots\cdots⑤$

由④⑤可得 $x=22$，$y=-10$，代入①得 $z=-5$， $\therefore (x,y,z)=(22,-10,-5)$.

23.空間兩直線 $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 4x-3y+z=1 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} 2x+y-z=k \\ 3x+2y-2z=1 \end{cases}$ 相交於一點，則 $k=$ ____________ .

解答 1

解析 $\begin{cases} x+y-z=0\cdots\cdots① \\ 4x-3y+z=1\cdots\cdots② \\ 3x+2y-2z=1\cdots\cdots③ \\ 2x+y-z=k\cdots\cdots④ \end{cases}$

解①②③得 $x=1$，$y=2$，$z=3$，代入④得 $k=1$.

24. L_1：$\begin{cases} ax+y+z=a-3 \\ x+ay+z=-2 \end{cases}$，$L_2$：$\begin{cases} x+ay+z=-2 \\ x+y+az=-2 \end{cases}$，$L_3$：$\begin{cases} x+y+az=-2 \\ ax+y+z=a-3 \end{cases}$，若 L_1，L_2，L_3 三直線互異且互相平行，則 $a=$ ____________ .

解答 -2

解析　由題意知$\begin{cases} ax+y+z=a-3 \\ x+ay+z=-2 \\ x+y+az=-2 \end{cases}$　無解 $\Rightarrow \Delta=0$，

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}=(a-1)^2(a+2)，$$

當 $a=1$ 時，得$\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x+y+z=-2 \\ x+y+z=-2 \end{cases}$（不合），當 $a=-2$ 時，得$\begin{cases} -2x+y+z=-5 \\ x-2y+z=-2 \\ x+y-2z=-2 \end{cases}$，故所求 $a=-2$．

25.一礦物內含 A、B、C 三種放射性物質，放射出同一種輻射．已知 A、B、C 每公克分別會釋放出 1 單位、2 單位、1 單位的輻射強度，又知 A、B、C 每過半年其質量分別變為原來質量的 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$ 倍．於一年前測得此礦物的輻射強度為 66 單位，而半年前測得此礦物的輻射強度為 22 單位，且目前此礦物的輻射強度為 8 單位，則目前此礦物中 A、B、C 物質之質量分別為(1)________，(2)________，(3)________公克．

解答　(1)4;(2)1;(3)2

解析　設 A、B、C 目前分別有 x，y，z 公克，

$$\begin{cases} x+2y+z=8 \cdots\cdots\cdots \cdots ① \\ 2x+6y+4z=22 \cdots \cdots ② \\ 4x+18y+16z=66 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

$①\times 4-② \Rightarrow 2x+y=10$，$①\times 16-③ \Rightarrow 4x+3y=22 \Rightarrow 3z=96$，$x=4$，$y=1$，$z=2$，

則目前此礦物 A、B、C 物質之質量分別為 4，1，2（公克）．

26.設 $\frac{2x+y+z}{x}=-\frac{3x+4y+2z}{y}=\frac{3x+5y+3z}{z}=k$，則 $k=$__________．

解答　$k=2$，-2 或 1

解析　原式 $\Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=kx \\ 3x+4y+2z=-ky \\ 3x+5y+3z=kz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-k)x+y+z=0 \\ 3x+(4+k)y+2z=0 \\ 3x+5y+(3-k)z=0 \end{cases}$，

∵原式中分母 $x\neq 0$，$y\neq 0$，$z\neq 0$，∴表有異於(0,0,0)之解

$\Rightarrow \Delta=0$，∴$\begin{vmatrix} 2-k & 1 & 1 \\ 3 & 4+k & 2 \\ 3 & 5 & 3-k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2-k & 0 & 1 \\ 3 & 2+k & 2 \\ 3 & 2+k & 3-k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2-k & 0 & 1 \\ 3 & 2+k & 2 \\ 0 & 0 & 1-k \end{vmatrix}$

$=(2-k)(2+k)(1-k)=0$，∴$k=2$，-2 或 1．

27.一容量為 100 立方公尺的水池，由 A 管注水，由 B、C 兩管放水；若三水管盡開，則水池由乾至剛好滿池恰需要 3 小時，若僅開 A、B 兩管，則水池由乾至剛好 50 立方公尺恰需 1 小時，若僅開 A、C 兩管，則水池由乾至剛好 75 立方公尺恰需 45 分鐘，則 C 管每小時的放水量為__________立方公尺．

解答　$\frac{50}{3}$

解析　設 A 每小時注水 x 立方公尺，B 每小時放水 y 立方公尺，C 每小時放水 z 立方公尺，

$$\begin{cases} 3(x-y-z)=100 \\ x-y=50 & \Rightarrow 50-z=\dfrac{100}{3} \\ \dfrac{3}{4}(x-z)=75 & \Rightarrow x-z=100 \end{cases}$$

$\therefore x=\dfrac{350}{3}$， $z=\dfrac{50}{3}$，即 C 管每小時放水量 $\dfrac{50}{3}$ 立方公尺．

28.方程組 $\begin{cases} x-y-2z=3 \\ 2x+ay+z=1 \\ 3x+y-z=b \end{cases}$ 有無限多解，求(1)$a=$ ____________．(2)$b=$ ____________．

解答 (1)2;(2)4

解析 方程組有無限多解，表示 $\Delta=\Delta_x=0$，

(1) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad -a-4-3+6a-1-2=0 \quad \Rightarrow \quad a=2$．

(2) $\Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ b & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad -6-2-b+4b-3-1=0 \quad \Rightarrow \quad b=4$．