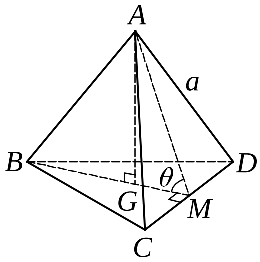
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：109.03.20					
範圍	空間向量、內、外積	班級	二年____班	姓名	
		座號			

壹、填充題：每題十分



1.設 *ABCD* 為正四面體（各面均為正△），其稜長 *a*，設 *M* 為 $\overline{CD}$ 中點，$\angle AMB=\theta$，則(1)其高 $\overline{AG}=$_____________． (2)體積為_____________．
(3)全表面積為_____________． (4)$\cos\theta=$_____________．

解答 (1) $\frac{\sqrt{6}}{3}a$;(2) $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$;(3) $\sqrt{3}a^2$;(4) $\frac{1}{3}$

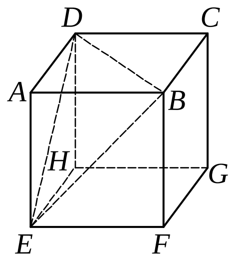
解析 (1)∵稜長為 *a*，底面△*BCD* 的中線 $\overline{BM}$ 長為 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$，*G* 為重心，

$$\therefore \overline{BG}=\frac{2}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}a)=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$，　△*ABG* 中，$\overline{AG}^2=\overline{AB}^2-\overline{BG}^2=a^2-\frac{1}{3}a^2=\frac{2}{3}a^2\Rightarrow\overline{AG}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$ ．

(2)體積 $=\frac{1}{3}$(底面積)$\cdot$ 高 $=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ．

(3)全表面積 $=4(\triangle BCD)=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}a^2$ ．

(4)△*AGM* 中，$\cos\theta=\frac{\overline{GM}}{\overline{AM}}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{1}{3}$ ．



2.如下圖，設 *ABCD* – *EFGH* 是一個邊長為 2 的正六面體，則
(1)四面體 *AEDB* 的體積為_____________．
(2)四面體 *AEDB* 的兩歪斜稜 $\overline{AE}$，$\overline{DB}$ 的距離為_____________．

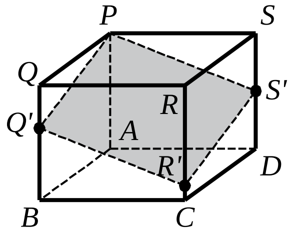
解答 (1) $\frac{4}{3}$;(2) $\sqrt{2}$

解析 (1)所求 $=\frac{1}{3}\cdot$(△*ABD* 面積)$\cdot$ 高 $=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2)\cdot 2=\frac{4}{3}$ ．

(2)作 $\overline{AH}\perp\overline{BD}$，又 $\overline{AH}\perp\overline{AE}$，則 $\overline{AH}$ 為所求，

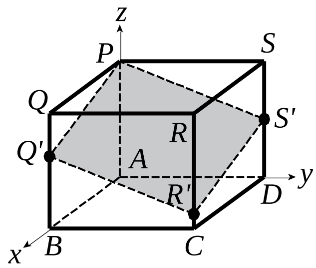
△*ABD* 的面積 $=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=\frac{1}{2}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{AH}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\overline{AH}\Rightarrow\overline{AH}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ ．

3. 如圖所示，一長方體 $ABCD-PQRS$，已知 $\overline{AP}=8$，$\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=10$，今從頂點 P 處切下一塊，得新頂點為 Q'，R'，S'．已知 P，Q'，R'，S' 共平面，且 $\overline{BQ'}=5$，$\overline{DS'}=4$．(1) $\overline{CR'}=$__________．(2)四邊形 $PQ'R'S'$ 的面積為__________．



解答 (1)1;(2) $6\sqrt{141}$

解析 建立一坐標系，如圖所示．



(1)令 $A(0,0,0)$，$B(6,0,0)$，$C(6,10,0)$，$D(0,10,0)$，$P(0,0,8)$，$Q(6,0,8)$，$R(6,10,8)$，$S(0,10,8)$，$Q'(6,0,5)$，$R'(6,10,k)$，$S'(0,10,4)$，

得 $\overrightarrow{PQ'}=(6,0,-3)$，$\overrightarrow{PR'}=(6,10,k-8)$，$\overrightarrow{PS'}=(0,10,-4)$ 共平面，

$$\begin{vmatrix}6&0&-3\\6&10&k-8\\0&10&-4\end{vmatrix}=0\Rightarrow -3\cdot\begin{vmatrix}6&10\\0&10\end{vmatrix}-(k-8)\cdot\begin{vmatrix}6&0\\0&10\end{vmatrix}+(-4)\cdot\begin{vmatrix}6&0\\6&10\end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow 60k=60$，得 $k=1$，即 $R'(6,10,1)$，故 $\overline{CR'}=1$．

(2) $\because$ $\overrightarrow{PQ'}=(6,0,-3)$ 且 $\overrightarrow{S'R'}=(6,0,-3)$，四邊形 $PQ'R'S'$ 為平行四邊形，

其面積為 $|\overrightarrow{PQ'}\times\overrightarrow{PS'}|=\sqrt{\begin{vmatrix}0&-3\\10&-4\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-3&6\\-4&0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}6&0\\0&10\end{vmatrix}^2}=\sqrt{30^2+24^2+60^2}=6\sqrt{141}$．

4.$A(4,0,2)$，$B(3,3,2)$，$C(3,0,4)$，求(1)$\triangle ABC$ 的面積 $=$_______．(2)A 到直線 BC 的距離 $=$________．

解答 (1) $\frac{7}{2}$;(2) $\frac{7\sqrt{13}}{13}$

解析 $\overrightarrow{AB}=(-1,3,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(6,2,3)$，

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\Big]\ \begin{matrix}3\\0\end{matrix}\times\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\times\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\times\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\ \Big[\begin{matrix}0\\2\end{matrix}$

(1)$\triangle ABC$ 的面積 $=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{7}{2}$．

(2)A 到直線 BC 的距離即為$\triangle ABC$ 中以 $\overline{BC}$ 為底的高，

由 $\overline{BC}=\sqrt{(3-3)^2+(3-0)^2+(2-4)^2}=\sqrt{13}$，　所求 $=\frac{2\triangle ABC}{\overline{BC}}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{\overline{BC}}=\frac{7}{\sqrt{13}}=\frac{7\sqrt{13}}{13}$．

5.已知 $\overrightarrow{a}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{b}=(1,-1,0)$，若 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{a}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{b}$，$|\overrightarrow{n}|=\sqrt{3}$，求 $\overrightarrow{n}=$____________．

解答 (1,1,－1)或(－1,－1,1)

解析 $\overrightarrow{n}$ 為 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 之公垂向量，$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(1,1,-1)$，令 $\overrightarrow{n}=t(1,1,-1)=(t,t,-t)$，

$|\overrightarrow{n}|=\sqrt{t^2+t^2+t^2}=\sqrt{3}\Rightarrow t=\pm1$，$\therefore$ $\overrightarrow{n}=$(1,1,－1)或(－1,－1,1)．

6.設 $A(-1,1,0)$，$B(1,3,1)$，$C(4,5,3)$，$D(-5,5,-2)$為空間中相異四點，試問：

(1)由向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 所展開的平行六面體之體積為____________ .

(2) D 點到平面 ABC 的距離為____________ .

解答 (1)8;(2) $\frac{8}{3}$

解析 (1) $\overrightarrow{AB}=(2,2,1)$， $\overrightarrow{AC}=(5,4,3)$， $\overrightarrow{AD}=(-4,4,-2)$，所求$=\left|\begin{vmatrix}2&2&1\\5&4&3\\-4&4&-2\end{vmatrix}\right|=8$.

(2) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 展平行四邊形面積$=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=3$，則 D 到平面 ABC 距離 $\frac{8}{3}$.

7.空間中三向量 $\overrightarrow{a}=(1,1,2)$， $\overrightarrow{b}=(2,0,1)$， $\overrightarrow{c}=(-1,3,-1)$，求由三向量 $\overrightarrow{a}$， $\overrightarrow{b}$， $\overrightarrow{c}$ 所張出之平行六面體的體積為____________ .

解答 10

解析 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(1,3,-2)$，體積$=|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|=|(1,3,-2)\cdot(-1,3,-1)|=10$.

10.若空間中四點 $A(1,1,1)$，$B(1,2,t)$，$C(3,4,5)$，$D(4,5,t)$共平面，則 $t=$____________ .

解答 5

解析 $\overrightarrow{AB}=(0,1,t-1)$， $\overrightarrow{AC}=(2,3,4)$， $\overrightarrow{AD}=(3,4,t-1)$ 共平面，

表示由 $\overrightarrow{AB}$， $\overrightarrow{AC}$， $\overrightarrow{AD}$ 所張出之平行六面體的體積為 0，

$\therefore|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|=|(7-3t,2t-2,-2)\cdot(3,4,t-1)|=|21-9t+8t-8-2t+2|=0\Rightarrow t=5$.

11.已知 $xyz\neq0$，且$(2x-y+3z)^2+(3x-y+z)^2=0$，則 $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x^3+y^3+z^3}=$____________ .

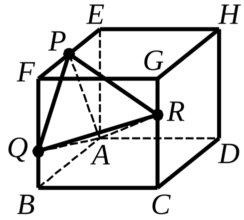
解答 $\frac{27}{44}$

解析 $(2x-y+3z)^2+(3x-y+z)^2=0$，

$\therefore\begin{cases}2x-y+3z=0\\3x-y+z=0\end{cases}\Rightarrow x:y:z=\begin{vmatrix}-1&3\\-1&1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2&-1\\3&-1\end{vmatrix}=2:7:1$，

令 $x=2t$，$y=7t$，$z=t$，$t\neq0$，所求$=\frac{9t\times8t\times3t}{8t^3+343t^3+t^3}=\frac{27}{44}$.

12 下圖為邊長 6 的正立方體 *ABCD*－*EFGH*，*P*，*Q*，*R* 分別在 $\overline{EF}$ ， $\overline{BF}$ ， $\overline{CG}$ 上，且 $\overline{EP}$ ： $\overline{PF}$ =1：1， $\overline{BQ}$ ： $\overline{QF}$ =1：2， $\overline{CR}$ ： $\overline{RG}$ =2：1，則四面體 *APQR* 的體積為____________ .



解答 30

解析 建立坐標系 ⇒ *A*(0,0,0)，*B*(6,0,0)，*D*(0,6,0)，*E*(0,0,6)，
依題意，∴*P*(3,0,6)，*Q*(6,0,2)，*R*(6,6,4)，

作 $\overrightarrow{AP}=(3,0,6)$， $\overrightarrow{AQ}=(6,0,2)$， $\overrightarrow{AR}=(6,6,4)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AQ}=(\begin{vmatrix}0&6\\0&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}6&3\\2&6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&0\\6&0\end{vmatrix})=(0,30,0)$

⇒ 四面體 *APQR* 的體積= $\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AQ})\cdot\overrightarrow{AR}|=\frac{1}{6}|(0,30,0)\cdot(6,6,4)|=30$.

13. 在空間坐標中有兩向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 滿足 $\overrightarrow{b}=(0,3,4),\ \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(3,-4,-5)$ ，且 $|\overrightarrow{a}|=2\sqrt{2}$ ，則 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 的夾角 θ 為__________.

解答 30° 或 150°

解析 $\because \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(3,-4,-5)$ ，$\therefore |\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$ 且 $\overrightarrow{b}=(0,3,4)\Rightarrow|\overrightarrow{b}|=5$

由外積公式可知 $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta\Rightarrow 5\sqrt{2}=2\sqrt{2}\times5\times\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{2}$　θ 為 30° 或 150°

14. 已知 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 為三空間向量，若 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(1,2,-2),\ \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}=(2,3,1)$ ，試求：

(1) $\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{c})=$________ · (2) $(2\overrightarrow{c}+3\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{a}=$________ · (3) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})=$________ ·

(4)若 $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=\sqrt{3}$ ，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角為____度·

解答 (1) $(-3,-4,-4)$(2)$(-7,-12,4)$(3)$(-8,5,1)$ (4) 90°

解析 (1) $\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}=(1,2,-2)-2(2,3,1)=(-3,-4,-4)$

(2) $(2\overrightarrow{c}+3\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=-2\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}-3\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-2(2,3,1)-3(1,2,-2)$
$=(-7,-12,4)$

(3) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})=(1,2,-2)\times(-2,-3,-1)=(\begin{vmatrix}2&-2\\-3&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&1\\-1&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\-2&-3\end{vmatrix})=(-8,5,1)$

(4)令夾角為 θ　$\because |\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|\times|\overrightarrow{b}|\times\sin\theta$

$\therefore \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=1$ ，$\therefore \theta=90^\circ$

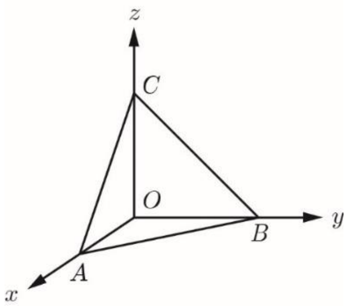
15. 若 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(3,4,5),\ \overrightarrow{c}=(2,-1,3)$，則 $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})=$__________.

解答 17

解析 因為三重積具有循環性質故 $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})=(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=(3,4,5)\cdot(2,-1,3)=17$

16. 若三線段 OA, OB, OC 兩兩互相垂直，而 $\overline{OA}=4,\ \overline{OB}=6,\ \overline{OC}=6$，則 $\triangle ABC$ 之面積為_______.

解答 $6\sqrt{17}$



解析 取 $A(4,0,0), B(0,6,0), C(0,0,6)$ $\overrightarrow{AB}=(-4,6,0),\ \overrightarrow{AC}=(-4,0,6)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}6&0\\0&6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&-4\\6&-4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4&6\\-4&0\end{vmatrix}\right)=(36,24,24)$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{36^2+24^2+24^2}=\frac{1}{2}\cdot 12\sqrt{9+4+4}=6\sqrt{17}$$

17. 設 $\overrightarrow{a}=(4,-1,3),\ \overrightarrow{b}=(-2,1,-2),\ \overrightarrow{c}=(x,y,z)$，若 $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}$ 且 $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{b}$，則 $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3xy-2yz+xz}=$______.

解答 $-\dfrac{9}{16}$

解析 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix}-1&3\\1&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&4\\-2&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&-1\\-2&1\end{vmatrix}\right)=(-1,2,2)$

$$\overrightarrow{c}\ //\ \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\Rightarrow\overrightarrow{c}=(x,y,z)=(-k,2k,2k),k\neq 0\Rightarrow\frac{x^2+y^2+z^2}{3xy-2yz+xz}=\frac{k^2+4k^2+4k^2}{-6k^2-8k^2-2k^2}=-\frac{9}{16}$$

18. 空間中一點 $P(4,-3,2)$ 在 x 軸、y 軸、z 軸之正射影分別為 Q,R,S，則：
(1) $\triangle QRS$ 之面積為________. (2) $\triangle QRS$ 在 xy 平面之正射影所得之三角形面積為________.

解答 (1) $\sqrt{61}$ (2) 6

解析 (1) $Q(4,0,0), R(0,-3,0), S(0,0,2)$，$\therefore\overrightarrow{QR}=(-4,-3,0), \overrightarrow{QS}=(-4,0,2)$

$$\overrightarrow{QR}\times\overrightarrow{QS}=\left(\begin{vmatrix}-3&0\\0&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&-4\\2&-4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4&-3\\-4&0\end{vmatrix}\right)=(-6,8,-12)$$

$$\triangle QRS=\frac{1}{2}|\overrightarrow{QR}\times\overrightarrow{QS}|=\frac{1}{2}\sqrt{36+64+144}=\sqrt{9+16+36}=\sqrt{61}$$

(2)所求即直角角形 $\triangle OQR=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$

19. 設 $|\overrightarrow{a}|=5, |\overrightarrow{b}|=4$，若 $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=10$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$__________.

解答 $\pm 10\sqrt{3}$

解析 $\because |\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta=20\sin\theta=10$

$$\therefore\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=30^\circ\text{ 或 }150^\circ\Rightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ 或 }-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ 故 }\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=10\sqrt{3}\text{ 或 }-10\sqrt{3}$$

20. 設兩向量 $\overrightarrow{a}=(1,2,2)$ 與 $\overrightarrow{b}$，

(1)若 $|\overrightarrow{b}|=6$ 且 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$，則 $\overrightarrow{b}=$__________.

(2)若 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{b}|^2$，則 $\overrightarrow{b}=$__________.

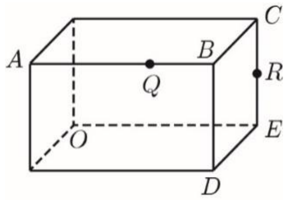
解答 (1) $(2,4,4)$ 或 $(-2,-4,-4)$ (2) $\overrightarrow{0}$

解析 (1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$，且 $\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$ （$\because|\overrightarrow{b}|=6$），則 $\overrightarrow{b}//\overrightarrow{a}$

設 $\overrightarrow{b}=t\overrightarrow{a}$， $|\overrightarrow{b}|=6$ $\therefore|t\overrightarrow{a}|=|t|\times 3=6\Rightarrow t=\pm 2$，所以 $\overrightarrow{b}=(2,4,4)$ 或 $(-2,-4,-4)$

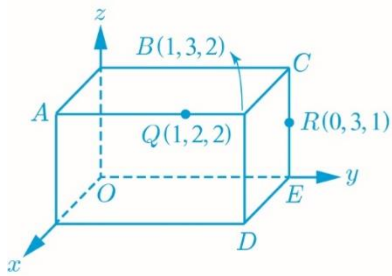
(2) $\because(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$ ，$\therefore(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=0$，故 $|\overrightarrow{b}|^2=0\Rightarrow\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$

21. 下圖為一長方體，其中 $\overline{AB}=3,\overline{BC}=1,\overline{BD}=2$ ，且 $\overline{AQ}=\frac{2}{3}\overline{AB},\overline{RE}=\frac{1}{2}\overline{CE}$ ，則 $\triangle OQR$ 的面積為__________.



解答 $\frac{\sqrt{26}}{2}$

解析 將長方體坐標化，如下圖



$B(1,3,2),Q(1,2,2),R(0,3,1)$ 則 $\overrightarrow{OQ}=(1,2,2),\overrightarrow{OR}=(0,3,1)$

$\Rightarrow\overrightarrow{OQ}\times\overrightarrow{OR}=(-4,-1,3)$

$\therefore\triangle OQR=\frac{1}{2}|\overline{OQ}\times\overline{OR}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+3^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

22. 由三直線 $L_1:2x+y=4,\ L_2:x+2y=14,\ L_3:2x-y=8$ 圍成一個三角形，則此三角形的面積為__.

解答 30

解析 $\begin{cases}2x+y=4\\x+2y=14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=8\end{cases}\Rightarrow A(-2,8)$

$\begin{cases}x+2y=14\\2x-y=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=4\end{cases}\Rightarrow B(6,4)$

$\begin{cases}2x-y=8\\2x+y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}\Rightarrow C(3,-2)$

$\triangle=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-2&8&1\\6&4&1\\3&-2&1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-8+24-12-12-4-48|=30$

23. 若 $A(1,3,k), B(4,1,2), C(0,3,5), D(3,1,4)$ 四點共平面，則 $k=$____。

解答 3

解析 $\overrightarrow{BA}=(-3,2,k-2), \overrightarrow{BC}=(-4,2,3), \ \overrightarrow{BD}=(-1,0,2)$

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\left(\begin{vmatrix}2&3\\0&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&-4\\2&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4&2\\-1&0\end{vmatrix}\right)=(4,5,2)$$

$\because A,B,C,D$ 四點共平面　$\therefore$（$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}$）$\cdot\overrightarrow{BA}=-12+10+2k-4=0\Rightarrow k=3$

24. 若 $A(3,1,2), B(11,1,-6), C(9,7,2)$，則
(1) $\triangle ABC$ 的面積為________。(2)點 C 到直線 AB 的距離為__________。

解答 (1) $24\sqrt{3}$ (2) $3\sqrt{6}$

解析 (1) $\overrightarrow{AB}=(8,0,-8)$，$\overrightarrow{AC}=(6,6,0)$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}0&-8\\6&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-8&8\\0&6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}8&0\\6&6\end{vmatrix}\right)=(48,-48,48)$$

$\therefore\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{48^2+(-48)^2+48^2}=24\sqrt{3}$

(2)令點 C 到直線 AB 的距離為 h　則 $\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot h=24\sqrt{3}\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{2}\cdot h=24\sqrt{3}\Rightarrow h=3\sqrt{6}$

25. 空間坐標中，已知 $\overrightarrow{OA}=(-2,2,3), \overrightarrow{OB}=(1,0,-2)$，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中 $-1\le x\le 2, -2\le y\le 1$，則 P 點所形成的圖形之面積為__________.

解答 $9\sqrt{21}$

解析 $$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\left(\begin{vmatrix}2&3\\0&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&-2\\-2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&2\\1&0\end{vmatrix}\right)=(-4,-1,-2)$$

P 點所形成之圖形面積 $=(3\times 3)\times(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 所張成之平行四邊形面積$)$

$$=9\,|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=9\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+(-2)^2}=9\sqrt{21}$$

26. 空間中兩向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$，其長度分別為 $|\overrightarrow{a}|=3, |\overrightarrow{b}|=2$，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 $60°$，則 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 所張成的平行四邊形的面積為__________.

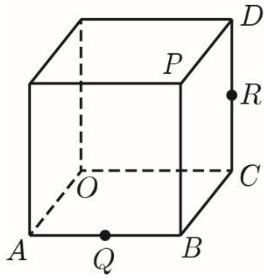
解答 $6\sqrt{3}$

解析 $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2=3^2+2\times 3\times 2\times\cos 60°+2^2=19$

$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2=3^2-2\times 3\times 2\times\cos 60°+2^2=7$

所求面積 $=\sqrt{|\vec{a}+\vec{b}|^2|\vec{a}-\vec{b}|^2-[(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})]^2}=\sqrt{19\times7-(3^2-2^2)^2}=6\sqrt{3}$

27. 下圖是一個邊長為 2 的正立方體，Q, R 分別為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的中點，則 $\triangle OQR$ 的面積為______.



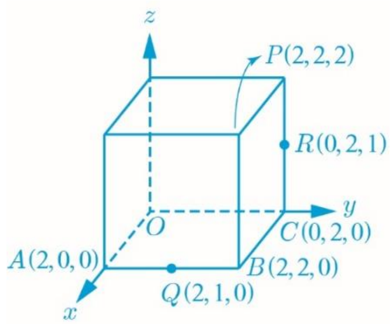
解答 $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

解析 將正立方體坐標化，如右圖

$A(2,0,0), B(2,2,0), C(0,2,0), D(0,2,2), Q(2,1,0), R(0,2,1), P(2,2,2)$

則 $\overrightarrow{OQ}=(2,1,0), \overrightarrow{OR}=(0,2,1)$ ，$\overrightarrow{OQ}\times\overrightarrow{OR}=(1,-2,4)$

$\therefore \triangle OQR=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OQ}\times\overrightarrow{OR}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$



28. 已知空間中兩向量 $\vec{a}=(2,-3,6)$ 與 $\vec{b}$ ，試求：

(1)若 $|\vec{b}|=21$ 且 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ ，則 $\vec{b}=$________.

(2)若 $\vec{b}=(3,k,1)$ 且 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}$ ，則 $k=$______________.

解答 (1) $\vec{b}=(6,-9,18)$ 或 $(-6,9,-18)$ ；(2) $k=4$

解析 (1)設 $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ，因為 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ 且 $|\vec{b}|=21\neq0$ ，所以 $\vec{b}\,//\,\vec{a}$

設 $\vec{b}=t\vec{a}$ ，得 $b_1=2t, b_2=-3t, b_3=6t$

代入 $|\vec{b}|=21$ 得 $\sqrt{(2t)^2+(-3t)^2+(6t)^2}=21$ ，$t=\pm3$. $\vec{b}=(6,-9,18)$ 或 $(-6,9,-18)$

(2)因為 $\vec{a}\times\vec{b}$ 垂直 $\vec{b}$ ，所以 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=0$ ，得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 　即 $6-3k+6=0$ ，故 $k=4$

29. 若 t, a, b 為實數，空間中四點 $O(0,0,0), A(2,1,2), B(t+1,2t,a), C(2t-2,b,-2t-6)$ ，若 $\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{OC}$ ，則：

(1)試以 t 表 a, b. 　　　　(2)試求 $\triangle OAB$ 面積的最小值.

解答 (1) $a=-t-1,\ b=4t-2$ 　(2) $\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$

解析 (1) $\because \overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{OC}$

$\therefore \overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{OC}, k\in\mathbb{R} \Rightarrow (t-1,2t-1,a-2)=k(2t-2,b,-2t-6)$

$\Rightarrow \dfrac{t-1}{2t-2}=\dfrac{2t-1}{b}=\dfrac{a-2}{-2t-6} \Rightarrow \dfrac{1}{2}b=2t-1 \Rightarrow b=4t-2$

$\therefore \dfrac{1}{2}(-2t-6)=a-2 \Rightarrow a=-t-1$

(2) $\overrightarrow{OA}=(2,1,2),\overrightarrow{OB}=(t+1,2t,-t-1)$

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2t & -t-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 2\\ -t-1 & t+1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 1\\ t+1 & 2t\end{vmatrix})=(-t-1-4t,2t+2+2t+2,4t-t-1)$$

$$=(-5t-1,4t+4,3t-1)$$

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-5t-1)^2+(4t+4)^2+(3t-1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{50t^2+36t+18}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{50(t+\frac{9}{25})^2+\frac{288}{25}}=\frac{6\sqrt{2}}{5}$$

31. 已知平面上三點 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$ ，且 $\triangle ABC$ 之面積為 2，又 $A'(2x_1-3y_1,4y_1-5x_1),B'(2x_2-3y_2,4y_2-5x_2),C'(2x_3-3y_3,4y_3-5x_3)$ ，試求 $\triangle A'B'C'$ 的面積.

解答 14

解析 $\because \frac{1}{2}|\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}|=2$

$$\therefore \triangle A'B'C'=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}2x_1-3y_1 & 4y_1-5x_1 & 1\\ 2x_2-3y_2 & 4y_2-5x_2 & 1\\ 2x_3-3y_3 & 4y_3-5x_3 & 1\end{vmatrix}|$$

$$=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}2x_1 & 4y_1-5x_1 & 1\\ 2x_2 & 4y_2-5x_2 & 1\\ 2x_3 & 4y_3-5x_3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-3y_1 & 4y_1-5x_1 & 1\\ -3y_2 & 4y_2-5x_2 & 1\\ -3y_3 & 4y_3-5x_3 & 1\end{vmatrix}|$$

$$=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}2x_1 & 4y_1 & 1\\ 2x_2 & 4y_2 & 1\\ 2x_3 & 4y_3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-3y_1 & -5x_1 & 1\\ -3y_2 & -5x_2 & 1\\ -3y_3 & -5x_3 & 1\end{vmatrix}|$$

$$=\frac{1}{2}|8\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}+(-15)\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}|$$

$$=\frac{1}{2}|(-7)\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}|=14$$