高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　日期：106.03.03					
範圍	Chap1 數列級數(B)	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1.將自然數按下列規律排列，每一列比前一列多一個數，如下所示：

第一列　1

第二列　2，3

第三列　4，5，6

第四列　7，8，9，10

……以此類推……若自然數 58 位於第 m 列的第 n 個數，求數對 $(m, n)=$ ______________ .

解答　(11，3)

解析　設 58 位在第 n 列，$1+2+3+\cdots+n\ge 58 \Rightarrow n=11$，∴58 在第 11 列，

∵$1+2+\cdots+10=55$．故 58 在第 11 列第 3 個數．

2.設 a，b，c 均為整數，$1\le a$，b，$c\le 9$，已知 a，b，c 成等差數列，且 $0.\overline{a}+0.4\overline{b}=1.2\overline{c}$，則序組$(a , b , c)$=_____________ .

解答　(7 , 5 , 3)

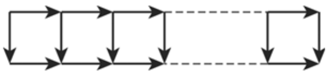
解析　原式$\Rightarrow \dfrac{a}{9}+\dfrac{40+b}{99}=1+\dfrac{20+c}{99}$　$\Rightarrow 11a+(40+b)=99+20+c$

$\Rightarrow 11a+b-c=79$……①

又 a，b，c 成等差數列，∴$a+c=2b$，代入①式消去 c 得 $b=12a-79$，

又 $1\le a$，b，$c\le 9$，∴取 $a=7\Rightarrow b=5$，$c=3$．

3.以 49 根火柴棒圍成如下圖的 n 個正方形，則 $n=$ _____________ .



解答　16

解析　$a_1=4$，$d=3$(一個コ)，即 □+コ+コ+コ+コ+……….

$a_n=a_1+(n-1)d=4+3(n-1)=49$，∴$n=16$．

4.在 4 與 64 之間插入 a，b，c 三個正數，使 4，a，b 成等比數列；b，c，64 亦成等比數列，且 a，b，c 成等差數列，則序組(a , b , c)=_____________ .

解答　(10 , 25 , 40)

解析　$a^2=4b$……①

$c^2=64b$……②

$2b=a+c$……③

由①②得 $c^2=16a^2$，

∵a、$c>0$，$c=4a$，代入③得 $b=\dfrac{5}{2}a$，

代入①得 $a^2=10a$，$a=10$（∵$a>0$），$b=25$，$c=40$，序組$(a , b , c)=(10 , 25 , 40)$．

5.設四正數 a，b，c，d 成等比數列，若 $a+b=8$，$c+d=72$，則公比 $r=$ _____________ .

解答　3

解析　設公比為 r，則 $b=ar$，$c=ar^2$，$d=ar^3$（$r>0$），

代入 $a+b=8$，$c+d=72$，得

$a+ar=8\cdots\cdots$①

$ar^2+ar^3=72\cdots\cdots$②

②÷① $\Rightarrow r^2=9$，又 $r>0$，$\therefore r=3$．

6.有三個正數成等比數列，其和為 21，其倒數和為 $\frac{7}{12}$，則此三數由小至大為＿＿＿＿＿＿．

解答　3，6，12

解析　設三數為 a，ar，ar^2（$a>0$，$r\geq 1$）則 $\begin{cases} a+ar+ar^2=21 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}=\frac{7}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1+r+r^2)=21\cdots\cdots① \\ \frac{1}{ar^2}(1+r+r^2)=\frac{7}{12}\cdots\cdots② \end{cases}$

①÷② $\Rightarrow (ar)^2=36$，$\because ar>0$，　$\therefore ar=6$，

代入②得 $\frac{1}{6r}(1+r+r^2)=\frac{7}{12}$，化簡 $2r^2-5r+2=0$，$\therefore r=\frac{1}{2}$ 或 2，

$\because r\geq 1$，$\therefore$取 $r=2$ 代入①得 $a=3$，$\therefore$三數為 3，6，12．

7.已知 a，3，b，27，c 成等比，求數對$(a,b,c)=$＿＿＿＿＿＿．

解答　$(1,9,81)$或$(-1,-9,-81)$

解析　a，3，b，27，c 成等比，$\therefore \frac{3}{a}=\frac{b}{3}=\frac{27}{b}=\frac{c}{27}\Rightarrow b^2=3\times 27$，$b=\pm 9$．

(1) $b=9$，$a=1$，$c=81$．

(2) $b=-9$，$a=-1$，$c=-81$．

$\therefore (a,b,c)=(1,9,81)$或$(-1,-9,-81)$．

8.一等差數列 a_1，a_2，a_3，……，a_n，已知 $a_1+a_3+a_5=15$，$a_1\cdot a_3\cdot a_5=45$，若公差 d 為負數，則第 88 項 $a_{88}=$＿＿＿＿＿＿．

解答　-165

解析　設公差為 d，則 $a_1+a_3+a_5=(a_3-2d)+a_3+(a_3+2d)=15$，$\Rightarrow 3a_3=15\Rightarrow a_3=5$，

$a_1\cdot a_3\cdot a_5=(5-2d)\cdot 5\cdot(5+2d)=45$，

$\Rightarrow 25-4d^2=9\Rightarrow d^2=4\Rightarrow d=\pm 2$（取負），$\Rightarrow a_1=5-(-4)=9$，

故 $a_{88}=9+(88-1)(-2)=-165$．

9.有三個數成等比數列，其和為 93，若第一項減 11，第三項加 2，則成等差數列，求這三數由小到大排列為＿＿＿＿＿＿．

解答　16，28，49

解析　設此三數為 $a-d+11$，a，$a+d-2$（$d>0$）

則 $a-d+11+a+a+d-2=3a+9=93\Rightarrow 3a=84\Rightarrow a=28$，

$\therefore$此三數為 $39-d$，28，$26+d$（成等比數列）

$\Rightarrow 28^2=(39-d)(26+d)\Rightarrow 784=1014+13d-d^2$

$\Rightarrow d^2-13d-230=0\Rightarrow (d-23)(d+10)=0$

$\Rightarrow d=23$ 或 -10（不合），

$\therefore$此三數為 16，28，49．

10.若等比級數 $1-3+3^2-3^3+\cdots+3^{16}$ 之和為 $\frac{1+b^c}{a}$（a、b、c 為整數且 $c>b$），則 $a+b+c=$＿＿＿＿．

解答　24

解析　依等比級數和之公式$=\dfrac{1\cdot[1-(-3)^{17}]}{1-(-3)}=\dfrac{1+3^{17}}{4}$，$\therefore(a, b, c)=(4, 3, 17)\Rightarrow a+b+c=24$.

11.數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=2$且$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$，n為自然數，求$a_n=$______________.

解答　$\dfrac{n+1}{n}$

解析　$\because a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$，

$\therefore a_2=2-\dfrac{1}{a_1}=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，$a_3=2-\dfrac{1}{a_2}=2-\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{4}{3}$，$a_4=2-\dfrac{1}{a_3}=2-\dfrac{1}{\frac{4}{3}}=\dfrac{5}{4}$，……… $\therefore a_n=\dfrac{n+1}{n}$.

12.有一遞迴數列〈a_n〉定義如下：$\begin{cases}a_1=3\\ a_{n+1}=a_n-2 \quad (n\geq 2)\end{cases}$，求$a_{36}=$______________.

解答　-67

解析　$a_{n+1}=a_n-2\Rightarrow a_{n+1}-a_n=-2$

表示〈a_n〉為首項$a_1=3$，公差$d=-2$之等差數列，$\therefore a_{36}=3+(36-1)(-2)=-67$.

13.設數列a_n滿足$a_1=2$，$a_{n+1}-a_n=6n^2-2n$（$n=1$，2，3，4，⋯），當$n\geq 2$時，試用n來表示$a_n-a_1=$______________.

解答　$2n(n-1)^2$

解析

$$\begin{array}{lcccccl}
 & a_2 & - & a_1 & = & 6 & \times & 1^2-2\times1\\
 & a_3 & - & a_2 & = & 6 & \times & 2^2-2\times2\\
 & a_4 & - & a_3 & = & 6 & \times & 3^2-2\times3\\
 & & & \vdots & & & & \\
+) & a_n & - & a_{n-1} & = & 6 & \times & (n-1)^2-2\times(n-1)\\
\hline
 & a_n & - & a_1 & = & 6 & \times & [1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]-2\times[1+2+3+\cdots+(n-1)]
\end{array}$$

$$=6\times\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}-2\times\frac{n(n-1)}{2}=(n-1)(n)(2n-1)-n(n-1)$$

$$=n(n-1)(2n-1-1)=2n(n-1)^2.$$

14.設數列〈a_n〉滿足$a_1=1$，$a_n=5a_{n-1}+8$（$n=2$，3，⋯），則$a_n=$______________.

解答　$3\times5^{n-1}-2$

解析　$a_n+k=5(a_{n-1}+k)\Rightarrow a_n=5a_{n-1}+4k$，

$\therefore$ $4k=8\Rightarrow k=2$ 代入 $a_n+2=5(a_{n-1}+2)$

$$\begin{array}{lcccccl}
 & a_2 & + & 2 & = & 5 & (a_1+2)\\
 & a_3 & + & 2 & = & 5 & (a_2+2)\\
 & a_4 & + & 2 & = & 5 & (a_3+2)\\
 & & & \vdots & & & \\
+) & a_n & + & 2 & = & 5 & (a_{n-1}+2)\\
\hline
 & a_n & + & 2 & = & 5^{n-1} & (a_1+2)
\end{array}$$

故 $a_n=3\times5^{n-1}-2$.

15.數列〈a_n〉中，$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$，$n\geq 1$，則 $a_{99}=$＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $\dfrac{149}{100}$

解析 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$
\begin{array}{rcrcl}
 & & a_1 & = & 1 \\
a_2 & - & a_1 & = & \dfrac{1}{(2)(3)} \\
a_3 & - & a_2 & = & \dfrac{1}{(3)(4)} \\
a_4 & - & a_3 & = & \dfrac{1}{(4)(5)} \\
 & & \vdots & & \\
+)\ a_{99} & - & a_{98} & = & \dfrac{1}{(99)(100)} \\
\hline
a_{99} & - & 1 & = & \dfrac{1}{(2)(3)}+\dfrac{1}{(3)(4)}+\cdots+\dfrac{1}{(99)(100)}
\end{array}
$$

$$=1+[(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{99}-\frac{1}{100})]=1+(\frac{1}{2}-\frac{1}{100})=\frac{149}{100}$$．

16.$\dfrac{1}{1^2+1}+\dfrac{1}{2^2+2}+\dfrac{1}{3^2+3}+\cdots+\dfrac{1}{99^2+99}=$＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $\dfrac{99}{100}$

解析 $\dfrac{1}{1^2+1}+\dfrac{1}{2^2+2}+\dfrac{1}{3^2+3}+\cdots+\dfrac{1}{99^2+99}$

$$=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{k^2+k}=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{99}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{99}-\frac{1}{100})=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$$．

17.級數 $1\times 3+2\times 5+3\times 7+4\times 9+\cdots+n\times(2n+1)=$＿＿＿＿＿＿＿＿．（用 n 表示）

解答 $\dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$

解析 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\times(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$

$$=n\times(n+1)(\frac{2n+1}{3}+\frac{1}{2})=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$．

18.級數 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$ 的和 ＝＿＿＿＿＿＿＿＿．（用 n 表示）

解答 $\dfrac{n}{2n+1}$

解析 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1})$

$$=\frac{1}{2}[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{2n}{2(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$．