高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：106.02.24					
範圍	Chap1 數列級數	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1.一個數列 $\langle \frac{k^2+2}{2k-1} \rangle$ 的第五項為____________ .

解答　3

解析　令 $k=5$ 代入 $\frac{k^2+2}{2k-1}$ 得 $\frac{27}{9}=3$.

2.有一個等差數列為 $\langle 2，5，8，\cdots，74 \rangle$，則

(1)這個數列的公差為____________ .(2)這個數列共有____________項 .

解答　(1)3;(2)25

解析　(1)公差$=5-2=8-5=3$.

(2)設項數為 n，則 $a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow 2+(n-1)\times 3=74$，$n=25$.

3.設有等差數列 $\langle a_n \rangle=\langle 110，116，122，\cdots \rangle$，則該數列共有____________項在 450 和 600 之間 .

解答　25

解析　$a_n=110+6(n-1)=6n+104$，$450<6n+104<600 \Rightarrow 58\le n\le 82$，

共有 $82-58+1=25$（項）.

4.已知等差數列 $\langle a_k \rangle$ 中，$a_7=41$，$a_{11}=65$，則 $a_{21}=$____________ .

解答　125

解析　設公差為 d，首項為 a_1，則

$a_1+6d=41\cdots\cdots$①

$a_1+10d=65\cdots\cdots$②

②－①得 $4d=24$，$d=6$，代入①得 $a_1=5$，

$\therefore a_{21}=a_1+20d=5+20\times 6=125$.

5.$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ 與 $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ 的等差中項為____________ .

解答　$\frac{5}{2}$

解析　a,c 等差中項 $b=\frac{a+c}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}})=\frac{1}{2}\times\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}=\frac{5}{2}$.

6.若直角三角形之三邊長成等差數列，則三邊長之比為____________ .（由小至大）

解答　3：4：5

解析　設三邊長為 $a-d$，a，$a+d$，（a，$d>0$），則$(a+d)^2=a^2+(a-d)^2$，

化簡得 $a^2-4ad=0 \Rightarrow a(a-4d)=0 \Rightarrow a=4d$ 或 0（0 不合），

∴三邊比為 $3d：4d：5d=3：4：5$.

7.在 1 和 100 之間放入 a_2，a_3，a_4，$\cdots$，a_8，a_9 等 8 個數，使 1，a_2，a_3，a_4，$\cdots$，a_8，a_9，100 成等差數列，則 $a_5=$____________ .

解答　45

解析　$100=1+(10-1)d$，$d=11$，$a_5=1+(5-1)\times 11=45$.

8.求等比數列 54，-18，6，…的第 7 項為____________ .

解答 $\frac{2}{27}$

解析 首項 $a_1=54$，公比 $r=\frac{-18}{54}=-\frac{1}{3}$，第 7 項 $a_7=a_1r^6=54\times(-\frac{1}{3})^6=\frac{2}{27}$.

9.有一等比數列之第 3 項是 8，第 6 項是-1，則第 10 項為____________ .

解答 $-\frac{1}{16}$

解析 設此數列為 $\langle a_n\rangle$，公比為 r，

$a_n=a_1\cdot r^{n-1}$，

$a_3=a_1r^2=8$……①

$a_6=a_1r^5=-1$……②

$\frac{②}{①}$：$r^3=-\frac{1}{8}\Rightarrow r=-\frac{1}{2}$，

$a_{10}=a_1r^9=(a_1r^5)\cdot r^4=(-1)(-\frac{1}{2})^4=-\frac{1}{16}$.

10.有一等比數列共有 10 項，已知奇數項的和為 20，偶數項的和為 60，則此等比數列的公比為_____ .

解答 3

解析 設此等比數列 $\langle a_n\rangle$ 的公比為 r，則

$$\begin{cases}a_1+a_1r^2+a_1r^4+a_1r^6+a_1r^8=20\cdots\cdots① \\ a_1r+a_1r^3+a_1r^5+a_1r^7+a_1r^9=60\cdots\cdots②\end{cases}$$

②÷①得 $r=3$.

11.三數成等比遞增數列，和為 19，若將此三數分別加上 1，4，6 後三數成等差數列，則此數列為_ .

解答 4，6，9

解析 設此三數為 a，ar，ar^2（$a>0$，$r\geq1$）

$$\begin{cases}a+ar+ar^2=19\cdots\cdots① \\ (a+1)+(ar^2+6)=2(ar+4)\cdots\cdots②\end{cases}$$

$\frac{①}{②}\Rightarrow\frac{a(r^2+r+1)}{a(r^2-2r+1)}=\frac{19}{1}$，

化簡得$(2r-3)(3r-2)=0\Rightarrow r=\frac{3}{2}$或$\frac{2}{3}$（不合），代入①得 $a=4$，∴三數為 4，6，9 .

12.有一正數等比數列，設第 n 項為 a_n，若 $a_4=5$，$a_{16}=320$ 且 $a_n>20000$，則 n 之最小值為_______ .

解答 28

解析 $a_{16}=a_4r^{12}$（$r>0$），$320=5r^{12}\Rightarrow r=\sqrt{2}$，

$a_n=320\times(\sqrt{2})^{n-16}>20000\Rightarrow(\sqrt{2})^{n-16}>62.5$，

$(\sqrt{2})^{10}=2^5=32$，$(\sqrt{2})^{11}=\sqrt{2}^{10}\cdot\sqrt{2}=32\sqrt{2}=45.\cdots$，$(\sqrt{2})^{12}=2^6=64>62.5$，

$\therefore n-16\geq12$，$\therefore n\geq28$.

13.一座七層塔，每一層所點的燈數都是上一層的兩倍，共點燈 381 盞，則最底層點_________盞燈 .

解答 192

解析 設最上層有 a 盞燈，則 $\frac{a(1-2^7)}{1-2}=381 \Rightarrow a=3$， ∴最底層有 $3\times 2^6=192$（盞）.

14.請用「Σ」表示級數 $2\times 18+4\times 15+6\times 12+\cdots+2n\times(21-3n)$．答：____________ .

解答 $\sum_{k=1}^{n} 2k(21-3k)$

解析 $\sum_{k=1}^{n} 2k(21-3k)$.

15.求下列各式之值．

(1) $2\times 1+3\times 3+4\times 5+5\times 7+\cdots+(k+1)\times(2k-1)+\cdots+26\times 49=$ ____________ .

(2) $\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{4\times 8}+\frac{1}{8\times 16}+\cdots+\frac{1}{2^n\times 2^{n+1}}+\cdots=$ ____________ .

(3) $\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{4\times 6}+\frac{1}{6\times 8}+\cdots+\frac{1}{(2n)\times(2n+2)}+\cdots=$ ____________ .

解答 (1)11350;(2) $\frac{1}{6}$;(3) $\frac{1}{4}$

解析 (1) $\sum_{k=1}^{25}(k+1)(2k-1)=\sum_{k=1}^{25}(2k^2+k-1)=2\times\frac{(25)(26)(51)}{6}+\frac{(25)(26)}{2}-25$

$=11050+325-25=11350$.

◎(2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k\cdot 2^{k+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+1}}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{6}$.

◎(3) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)(2k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2})=\frac{1}{2}[(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}})+(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}})+\cdots]=\frac{1}{4}$.

16.n 是自然數，利用 $\sum_{k=1}^{n}k^3$ 的求和公式，若 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=3025$，$n=$ ____________ .

解答 10

解析 $[\frac{n(n+1)}{2}]^2=3025=55^2$， ∴ $\frac{n(n+1)}{2}=55$， $n(n+1)=110=10\times 11$，故 $n=10$.

17.等差級數 $-1+2+5+8+\cdots+(3n+2)+\cdots$， 至少要加到第____________項，總和才會超過 75 .

解答 8

解析 設加至第 n 項，其和會超過 75，則

$S_n=\frac{n[2\times(-1)+(n-1)\times 3]}{2}>75 \Rightarrow n(3n-5)>150$，驗算可得 n 至少為 8，才使總和超過 75 .

18.求 $1^3-2^3+3^3-4^3+\cdots+21^3=$ ____________ .

解答 4961

解析 原式 $=(1^3+2^3+3^3+\cdots+21^3)-2(2^3+4^3+\cdots+20^3)$

$=(1^3+2^3+\cdots+21^3)-2\cdot 2^3(1^3+2^3+\cdots+10^3)$

$=(\frac{21\cdot 22}{2})^2-16(\frac{10\cdot 11}{2})^2=53361-48400=4961$.

19.求 $6^2+7^2+\cdots+30^2=$ ____________ .

解答 9400

解析　原式 $=(1^2+2^2+\cdots+30^2)-(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)=\dfrac{30\cdot31\cdot61}{6}-\dfrac{5\cdot6\cdot11}{6}=9400$.

20.設 $\sum_{k=0}^{4}(ak+b)=50,\ \sum_{k=1}^{5}(ak+b)=70$，則 $(a, b)=$____________ .

解答　$(4, 2)$

解析　由第一式 $\Rightarrow b+(a+b)+(2a+b)+(3a+b)+(4a+b)=50\Rightarrow 10a+5b=50\cdots\cdots$①

由第二式 $\Rightarrow (a+b)+(2a+b)+(3a+b)+(4a+b)+(5a+b)=70\Rightarrow 15a+5b=70\cdots\cdots$②

由①②解得 $a=4$，$b=2$.

21.設一等差數列的前 n 項之和為 9，前 $2n$ 項之和為 12，則前 $3n$ 項之和為____________ .

解答　9

解析　等差數列每 n 項一組之和構成另一個等差數列，即 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 成等差，

$\therefore S_n=9$，$S_{2n}-S_n=12-9=3$ 及 $S_{3n}-S_{2n}$ 成等差數列，公差 $=3-9=-6$，

$\therefore S_{3n}-S_{2n}=3+(-6)=-3$，$\therefore S_{3n}=S_{2n}+(-3)=12-3=9$.

22.已知一等差數列有 99 項，其中第 50 項為 100，求這 99 項的和為____________ .

解答　9900

解析　中央項 $a_{\frac{99+1}{2}}=a_{50}\Rightarrow S_{99}=99\times a_{50}=99\times100=9900$.

23.等差數列有 20 項，$a_1+a_2=10$，$a_{19}+a_{20}=30$，此數列所有項的總和為____________ .

解答　200

解析　$(a_1+a_{20})+(a_2+a_{19})=40$，且 $(a_1+a_{20})=(a_2+a_{19})$ 即 $2(a_1+a_{20})=40$　$\therefore(a_1+a_{20})=20$，

$S_{20}=\dfrac{20}{2}(a_1+a_{20})=200$.

24.求等差級數 $20+18\frac{4}{5}+17\frac{3}{5}+\cdots$ 至第 10 項的和為____________ .

解答　146

解析　公差 $d=18\frac{4}{5}-20=-\frac{6}{5}$，$\therefore$ 總和 $S_{10}=\dfrac{10[2\times20+(10-1)(-\frac{6}{5})]}{2}=146$.

25.數列 1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，5，5，5，5，5，⋯中，首 200 項之和是____________ .

解答　2670

解析　(1)，(2，2)，(3，3，3)，(4，4，4，4)，(5，5，5，5，5)，⋯中,第 k 群有 k 項

$1+2+3+\cdots+k<200\Rightarrow k=19$，$\dfrac{19\times20}{2}=190$，

首 200 項為 $(1)(2, 2)(3, 3, 3)\cdots(19,\cdots, 19)(\underbrace{20,20,\cdots,20}_{10個})$，

其和為 $1+2\times2+3\times3+\cdots+19\times19+20\times10=\dfrac{19\times20\times39}{6}+200=2670$.

26.已知數列〈a_n〉之前 n 項和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2+1$，求 (1)$a_1=$____，(2)$a_4=$____，(3)$a_n=$____ .

解答　(1)2;(2)7;(3) $a_n=\begin{cases}2 & (n=1)\\ 2n-1 & (n\ge2)\end{cases}$

解析　(1)$a_1=S_1=1^2+1=2$.

(2)當 $n \geq 2$，

$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2+1) - [(n-1)^2+1] = 2n-1$，$a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$，

(3) $a_n = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ 2n-1 & (n \geq 2) \end{cases}$.

27.兩等差數列前 n 項和之比為$(2n+3)$：$(3n+2)$，則此兩數列第 11 項之比為＿＿＿＿＿＿＿ .

解答 9：13

解析 設此兩數列首項分別為 a_1，b_1，公差分別為 d_1，d_2，

由已知，$\dfrac{n[2a_1+(n-1)d_1]}{2}$ ： $\dfrac{n[2b_1+(n-1)d_2]}{2} = (2n+3)$：$(3n+2)$

$\Rightarrow \left[a_1 + (\dfrac{n-1}{2})d_1\right]$ ： $\left[b_1 + (\dfrac{n-1}{2})d_2\right] = (2n+3)$：$(3n+2)\cdots\cdots(*)$

兩數列第 11 項即 $\dfrac{n-1}{2} = 10$，得 $n = 21$，代入(*)式得

a_{11}：$b_{11} = (a_1 + 10d_1)$：$(b_1 + 10d_2) = (2 \times 21 + 3)$：$(3 \times 21 + 2) = 9$：$13$.

[另解] 兩數列若第 11 項為中央項則項數為$(2 \times 11 - 1) = 21$

a_{11}：$b_{11} = S_{21}$：$S'_{21} = (2 \times 21 + 3)$：$(3 \times 21 + 2) = 9$：$13$.

28.若 $1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + 10 \times 2^{10} = 9a + 2$，則 $a =$＿＿＿＿＿＿＿ .

解答 2^{11}

解析 將數列乘以 2，後退一項，與原數列相減

$$\begin{array}{rcccccccccccl} & 1\cdot 2 & + & 2\cdot 2^2 & + & 3\cdot 2^3 & + & \cdots & + & 10\cdot 2^{10} & & & = 9a+2 \\ -) & & & 1\cdot 2^2 & + & 2\cdot 2^3 & + & \cdots & + & 9\cdot 2^{10} & + & 10\cdot 2^{11} & = 18a+4 \\ \hline & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \cdots & + & 2^{10} & - & 10\cdot 2^{11} & = -9a-2 \end{array}$$

$\Rightarrow 9a + 2 = 10 \cdot 2^{11} - \dfrac{2(2^{10}-1)}{2-1} = 9 \cdot 2^{11} + 2 \Rightarrow a = 2^{11}$.

29.求級數和：$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(3k-1)^2 =$＿＿＿＿＿＿＿ .

解答 3145

解析 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(3k-1)^2 = \sum_{k=1}^{10}(9k^2 - 6k + 1) = 9\sum_{k=1}^{10}k^2 - 6\sum_{k=1}^{10}k + \sum_{k=1}^{10}1$

$= 9 \times \dfrac{(10)(11)(21)}{6} - 6 \times \dfrac{(10)(11)}{2} + 1 \times 10 = 3465 - 330 + 10 = 3145$.

30.$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k(k+1) =$＿＿＿＿＿＿＿ .

解答 440

解析 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k(k+1) = \sum_{k=1}^{10}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{10}k^2 + \sum_{k=1}^{10}k = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} = 440$.

公式：$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots\cdots + n(n+1) = \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$