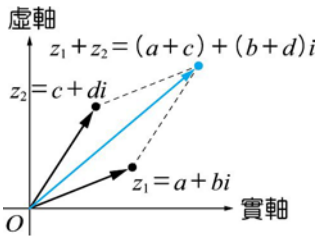
2-3　複數的極式與幾何意義

主題一　複數平面

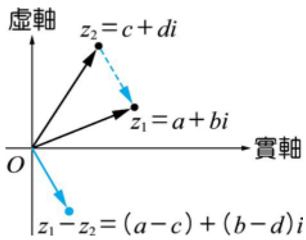
1. 複數平面：每個複數 $z=a+bi$（其中 a 與 b 皆為實數），都可對應坐標平面上的一個點（a，b），而用來表示所有複數的坐標平面，稱為複數平面或高斯平面。複數平面上，x 軸上的點所代表的複數其虛部為 0，故為實數；而 y 軸上的點（原點除外）所代表的複數其實部為 0，故為純虛數。因此，x 軸又稱為實軸，y 軸又稱為虛軸。
2. 複數加、減法與係數積的幾何意義：

(1) 加法：$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，則 $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$。
在複數平面上，z_1，z_2，z_1+z_2 的相對位置如圖（一）所示。

(2) 減法：$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，則 $z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$。
在複數平面上，z_1，z_2，z_1-z_2 的相對位置，如圖（二）所示。



圖（一）

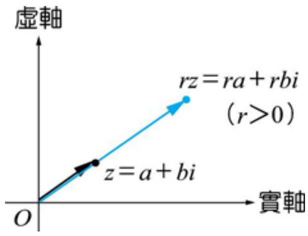


圖（二）

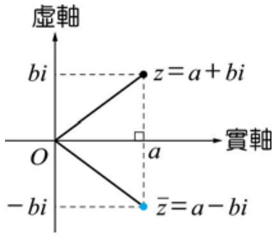
(3) 係數積：$z=a+bi$，則 $rz=ra+rbi$。
在複數平面上，z，rz 的相對位置，如圖（三）所示。（以 $r>0$ 為例）

(4) 共軛複數：$z=a+bi$，則 $\overline{z}=a-bi$。

在複數平面上，$\overline{z}$ 的位置為將 z 對實軸作鏡射而得，如圖（四）所示。



圖（三）



圖（四）

3. 複數的絕對值：

定義複數 $z=a+bi$ 的絕對值為 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，即標在複數平面上時與原點的距離。

4. 複數絕對值的性質：

(1) $|z|=|-z|=|\overline{z}|$。　　(2) $|z|^2=z\cdot\overline{z}$。

(3) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$。　　(4) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$，但 $z_2\neq0$。

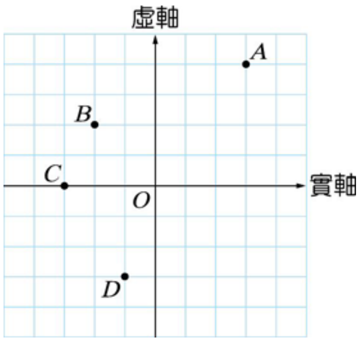
(5) $|z^n|=|z|^n$，其中 n 是正整數。

(6) 三角不等式：$\begin{cases} |z_1|+|z_2| \geq |z_1+z_2| \text{三角形兩邊和大於第三邊。} \\ \big||z_1|-|z_2|\big| \leq |z_1-z_2| \text{三角形兩邊差的絕對值小於第三邊。} \end{cases}$

例題1　複數與複數的絕對值

(1) 如右圖的複數平面，試寫出 A，B，C，D 所代表的複數。

(2) 已知 $z_1=4+3i$，$z_2=4-3i$，$z_3=-4-3i$，$z_4=-4+3i$，試分別求出 $|z_1|$，$|z_2|$，$|z_3|$，$|z_4|$ 的值。



解　(1) A 點的坐標為 $(3，4)$，故 A 點所代表的複數為 $3+4i$

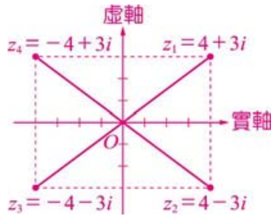
同理，B 點所代表的複數為 $-2+2i$

C 點所代表的複數為 -3

D 點所代表的複數為 $-1-3i$

(2) $|z_1|=\sqrt{4^2+3^2}=5$　　$|z_2|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

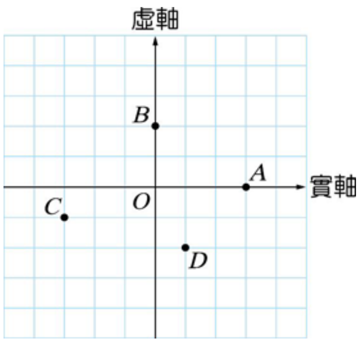
$|z_3|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$　　$|z_4|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$



類題

(1) 如右圖的複數平面，試寫出 A，B，C，D 所代表的複數。

(2) 已知 $z_1=1+\sqrt{3}\,i$，$z_2=\sqrt{3}+i$，$z_3=1-\sqrt{3}\,i$，$z_4=\sqrt{3}-i$，試分別求出 $|z_1|$，$|z_2|$，$|z_3|$，$|z_4|$ 的值。



解　(1) A 點的坐標為 $(3，0)$，故 A 點所代表的複數為 3

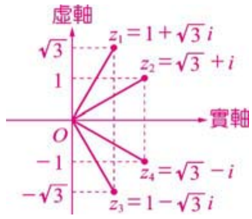
同理，B 點所代表的複數為 $2i$

C 點所代表的複數為 $-3-i$

D 點所代表的複數為 $1-2i$

(2) $|z_1|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$　　$|z_2|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$

$|z_3|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$　　$|z_4|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$



例題2　複數絕對值的性質

設 $z=\dfrac{(1-2i)^2\cdot(3+4i)^5}{(2-i)^4\cdot(-4-3i)^4}$，試求｜$z$｜的值。

注意　利用｜$z_1\cdot z_2$｜＝｜z_1｜・｜z_2｜、｜z^n｜＝｜z｜^{n} 與 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$。

解　$$|z|=\left|\frac{(1-2i)^2\cdot(3+4i)^5}{(2-i)^4\cdot(-4-3i)^4}\right|=\frac{|(1-2i)^2\cdot(3+4i)^5|}{|(2-i)^4\cdot(-4-3i)^4|}=\frac{|(1-2i)^2|\cdot|(3+4i)^5|}{|(2-i)^4|\cdot|(-4-3i)^4|}$$

$$=\frac{|1-2i|^2\cdot|3+4i|^5}{|2-i|^4\cdot|-4-3i|^4}=\frac{(\sqrt{5})^2\cdot 5^5}{(\sqrt{5})^4\cdot 5^4}=\frac{5}{(\sqrt{5})^2}=1$$

類題

設 $z=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^5}{(\sqrt{3}-i)^3\cdot(1-i)^2}$，試求 ｜$z$｜的值。

解　$$|z|=\left|\frac{(1+\sqrt{3}i)^5}{(\sqrt{3}-i)^3\cdot(1-i)^2}\right|=\frac{|(1+\sqrt{3}i)^5|}{|(\sqrt{3}-i)^3\cdot(1-i)^2|}=\frac{|1+\sqrt{3}i|^5}{|\sqrt{3}-i|^3\cdot|1-i|^2}=\frac{2^5}{2^3\cdot(\sqrt{2})^2}=2$$

例題3　三角不等式

若 $z_1=1-2i$，$z_2=-3-4i$，試求 ｜z_1｜，｜z_2｜，｜z_1+z_2｜的值，

並比較｜z_1｜＋｜z_2｜和｜z_1+z_2｜的大小關係。

注意　三角不等式。

解　$\because z_1=1-2i$　$\therefore |z_1|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

$\because z_2=-3-4i$　$\therefore |z_2|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$

$z_1+z_2=-2-6i$　$\therefore |z_1+z_2|=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

｜z_1｜＋｜z_2｜＝$\sqrt{5}+5\approx 7.2$，｜z_1+z_2｜＝$2\sqrt{10}\approx 6.3$　$\therefore$｜z_1｜＋｜z_2｜＞｜z_1+z_2｜

類題

若 $z_1=1-2i$，$z_2=-3-4i$，試求｜z_1｜，｜z_2｜，｜z_1-z_2｜的值，

並比較｜｜z_1｜－｜z_2｜｜與｜z_1-z_2｜的大小關係。

解　$\because z_1=1-2i$　$\therefore |z_1|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

$\because z_2=-3-4i \quad \therefore |z_2|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$

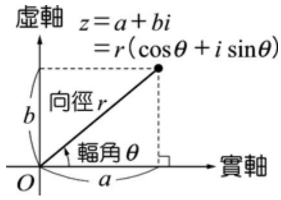
$z_1-z_2=4+2i \quad \therefore |z_1-z_2|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\big|\,|z_1|-|z_2|\,\big|=|\sqrt{5}-5|=5-\sqrt{5}\approx 2.8$，$|z_1-z_2|=2\sqrt{5}\approx 4.5$

$\therefore \big|\,|z_1|-|z_2|\,\big|<|z_1-z_2|$

主題二　複數的極式

1. 複數的極式：複數 $z=a+bi$ 的極式為 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 稱為 z 的“向徑”，且 θ 滿足 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，稱為複數 z 的“輻角”；如果取 $0\le\theta<2\pi$，則稱為主輻角。
2. 兩複數極式相等時，向徑相等，而輻角為同界角。
   $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$
   $z_1=z_2 \Leftrightarrow r_1=r_2$ 且 $\theta_1=\theta_2+2k\pi$，其中 k 為整數。



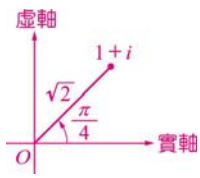
3. 複數極式的乘法公式與除法公式：
   令 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ 及 $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，則：
   (1) $z_1z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$。
   (2) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$。$(z_2\neq 0)$
4. 複數乘法的幾何意義：若 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則“將一複數乘上 z”即“將此複數的向徑變成 r 倍，輻角增加 θ”，亦即“將此複數長度變成 r 倍，繞原點轉 θ 角”。

例題4　複數的極式

將下列複數化為極式：

(1) $1+i$。　(2) $-1-\sqrt{3}i$。　(3) $-2i$。　(4) -3。

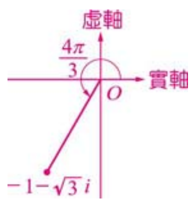
解　(1) 如右圖



$\because |1+i|=\sqrt{2}$

$\therefore 1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) 如右下圖



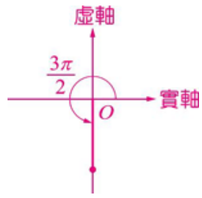
$\because |-1-\sqrt{3}i|=2$

$\therefore -1-\sqrt{3}i=2\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$

(3) 如右圖

$\because |-2i|=2$

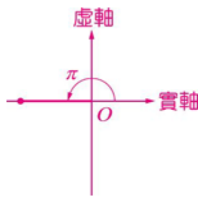
$\therefore -2i = 2(0-1i) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$



(4) 如右下圖

$\because |-3|=3$

$\therefore -3=3(-1+0i)=3(\cos\pi+i\sin\pi)$



類題

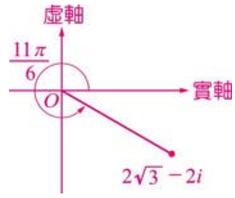
將下列複數化為極式：

(1) $2\sqrt{3}-2i$。　　(2) $-2+2i$。　　(3) 2。　　(4) $3i$。

解　(1) 如圖（一）

$\because \left|2\sqrt{3}-2i\right| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = 4$

$\therefore 2\sqrt{3}-2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

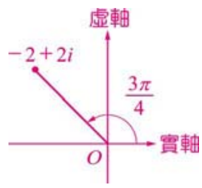


圖（一）

(2) 如圖（二）

$\because \left|-2+2i\right| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

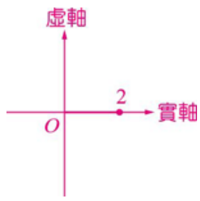
$\therefore -2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$



圖（二）

(3) 如圖（三）

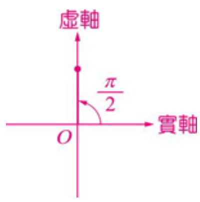
$\because |2|=2$　$\therefore 2=2(1+0i)=2(\cos 0+i\sin 0)$



圖（三）

(4) 如圖（四）

$\because |3i|=3$　$\therefore 3i=3(0+1i)=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$



圖（四）

例題5　將複數化為極式

將下列各複數化為極式：

(1) $2(\sin 60°+i\cos 60°)$。　　(2) $-2(\sin 60°-i\cos 60°)$。

注意　極式為 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的型態，其中 $r>0$。

解　(1) $2(\sin 60^\circ+i\cos 60^\circ)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\therefore r=2$ 且 $\begin{cases}\cos\theta=\sin 60^\circ\\ \sin\theta=\cos 60^\circ\end{cases}$　$\therefore\theta$ 為第一象限角，取 $0\le\theta<2\pi$，則 $\theta=30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$

故 $2(\sin 60^\circ+i\cos 60^\circ)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

(2) $-2(\sin 60^\circ-i\cos 60^\circ)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\therefore r=2$ 且 $\begin{cases}\cos\theta=-\sin 60^\circ\\ \sin\theta=\cos 60^\circ\end{cases}$　$\therefore\theta$ 為第二象限角，取 $0\le\theta<2\pi$，

則 $\theta=90^\circ+60^\circ=150^\circ=\dfrac{5\pi}{6}$

故 $-2(\sin 60^\circ-i\cos 60^\circ)=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

類題

將下列各複數化為極式：

(1) $\sin 30^\circ+i\cos 30^\circ$。　　(2) $-\sin 30^\circ-i\cos 30^\circ$。

解　(1) $\sin 30^\circ+i\cos 30^\circ=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\therefore r=1$ 且 $\begin{cases}\cos\theta=\sin 30^\circ\\ \sin\theta=\cos 30^\circ\end{cases}$　$\therefore\theta$ 為第一象限角，取 $0\le\theta<2\pi$，則 $\theta=60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$

故 $\sin 30^\circ+i\cos 30^\circ=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$

(2) $-\sin 30^\circ-i\cos 30^\circ=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\therefore r=1$ 且 $\begin{cases}\cos\theta=-\sin 30^\circ\\ \sin\theta=-\cos 30^\circ\end{cases}$　$\therefore\theta$ 為第三象限角，取 $0\le\theta<2\pi$，

則 $\theta=270^\circ-30^\circ=240^\circ=\dfrac{4\pi}{3}$

故 $-\sin 30^\circ-i\cos 30^\circ=1\times\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$

例題6　極式的乘法公式與除法公式

(1) 試求 $\dfrac{(\cos 24^\circ+i\sin 24^\circ)(\cos 56^\circ+i\sin 56^\circ)}{(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)(\cos 35^\circ+i\sin 35^\circ)}$ 的值。

(2) $z=\dfrac{2(\cos 290^\circ+i\sin 110^\circ)}{3(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)}$，試求 z 的值與 $|z|$。

解　(1) $\dfrac{(\cos 24^\circ+i\sin 24^\circ)(\cos 56^\circ+i\sin 56^\circ)}{(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)(\cos 35^\circ+i\sin 35^\circ)}=\dfrac{\cos 80^\circ+i\sin 80^\circ}{\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ}=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

(2) $\cos 290^\circ+i\sin 110^\circ=\cos(360^\circ-70^\circ)+i\sin(180^\circ-70^\circ)=\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ$

$\therefore z=\dfrac{2(\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ)}{3(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)}=\dfrac{2}{3}(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{1}{3}i$

且 $|z|=\dfrac{2}{3}$

類題

(1) 試求$\dfrac{\cos 114°+i\sin 114°}{(\cos 65°+i\sin 65°)(\cos 11°-i\sin 11°)}$的值。

(2) $z=\dfrac{2(\sin 320°+i\cos 40°)}{\cos 40°+i\sin 40°}$，試求 z 的值與 $|z|$。

解 (1) $\dfrac{\cos 114°+i\sin 114°}{(\cos 65°+i\sin 65°)(\cos 11°-i\sin 11°)}=\dfrac{\cos 114°+i\sin 114°}{(\cos 65°+i\sin 65°)(\cos(-11°)+i\sin(-11°))}$

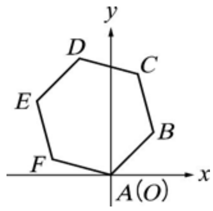
$$=\frac{\cos 114°+i\sin 114°}{\cos 54°+i\sin 54°}=\cos 60°+i\sin 60°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(2) $\sin 320°+i\cos 40°=-\cos 50°+i\sin 50°=\cos 130°+i\sin 130°$

$\therefore z=\dfrac{2(\cos 130°+i\sin 130°)}{\cos 40°+i\sin 40°}=2(\cos 90°+i\sin 90°)=2i$

且 $|z|=2$

例題7　複數乘法的幾何意義



如下圖，在正六邊形 $ABCDEF$ 中，已知 A 點在原點，且 B 點坐標為$(4，4)$，試求：

(1) F 點坐標。

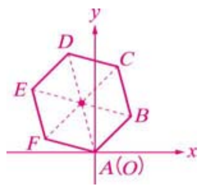
(2) D 點坐標。

注意　坐標平面上的點 $(a，b)$ 與複數平面上的 $a+bi$ 可互相對應。

解 (1) 視 B 點代表複數 $4+4i$，如下圖所示

F 點可由 B 點繞原點逆時針旋轉 $120°$ 而得

故 F 點所代表的複數為



$$(4+4i)(\cos 120°+i\sin 120°)=(4+4i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=(-2-2\sqrt{3})+(-2+2\sqrt{3})i$$

故 F 點的坐標為 $(-2-2\sqrt{3}，-2+2\sqrt{3})$

(2) 易求得$\overline{OD}=2\overline{OB}$，且$\angle BOD=60°$

故 D 點可由 B 點繞原點長度乘以 2 倍，且逆時針旋轉 $60°$ 而得

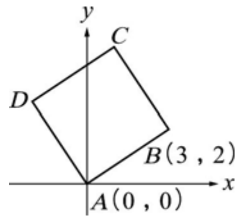
故 D 點所代表的複數為$(4+4i)\times 2(\cos 60°+i\sin 60°)$

$$=(8+8i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=(4-4\sqrt{3})+(4+4\sqrt{3})i$$

故 D 點的坐標為$(4-4\sqrt{3}，4+4\sqrt{3})$

類題

在坐標平面上，已知正方形 $ABCD$ 的兩頂點 $A(0,0)$，$B(3,2)$ 且 C 點在第一象限，試求頂點 C，D 的坐標。



解　視 B 點代表複數 $3+2i$

根據複數乘法的幾何意義，得 D 點所代表的複數為

$(3+2i)(\cos 90°+i\sin 90°)=(3+2i)\cdot i=-2+3i$ 故 D 點的坐標為 $(-2,3)$

而 $\overline{AC}$ 的中點與 $\overline{BD}$ 的中點同（$\because ABCD$ 為正方形）

設 C 點坐標為 (x,y)，可得 $\left(\dfrac{x+0}{2},\dfrac{y+0}{2}\right)=\left(\dfrac{3+(-2)}{2},\dfrac{2+3}{2}\right)$　　$\therefore x=1$，$y=5$

故 C 點坐標為 $(1,5)$

主題三　棣美弗定理

1. 棣美弗定理：設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$n$ 是正整數，則 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$。

2. 棣美弗定理可推廣 $\begin{cases}\text{指數為負整數} \Rightarrow z^{-n}=r^{-n}(\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)) \\ z=r(\cos\theta-i\sin\theta)\Rightarrow z^n=r^n(\cos n\theta-i\sin\theta)\end{cases}$。

例題8　棣美弗定理

設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$n$ 是正整數，試證明：

(1) $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$。

(2) $z^{-n}=r^{-n}(\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta))$。

注意　利用數學歸納法。

證　(1) 我們利用數學歸納法證明：

① 當 $n=1$ 時，$z^1=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r^1(\cos(1\times\theta)+i\sin(1\times\theta))$

故 $n=1$ 時，等式成立

② 假設 $n=k$ 時，等式成立，即 $z^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$

則當 $n=k+1$ 時，

$$\begin{aligned}z^{k+1}&=z^k\times z=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)\times r(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=r^{k+1}((\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta)+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta))\\&=r^{k+1}(\cos(k\theta+\theta)+i\sin(k\theta+\theta))\\&=r^{k+1}(\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta)\end{aligned}$$

故 $n=k+1$ 時，等式亦成立

由數學歸納法可知，$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ 對所有正整數 n 皆成立

(2) $z^{-n}=\left(\dfrac{1}{z}\right)^{n}=\left(\dfrac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}\right)^{n}$

$=\dfrac{1}{r^{n}}\left(\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}\right)^{n}=\dfrac{1}{r^{n}}(\cos\theta+i\sin\theta)^{n}$

$=r^{-n}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))^{n}$

$=r^{-n}(\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta))$

類題

(1) 若 $z=2(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)$，試計算 z^{10} 與 z^{-10} 的值。

(2) 若 $z=2(\cos 15^\circ-i\sin 15^\circ)$，試計算 z^{10} 的值。

解　(1) 由棣美弗定理

$z^{10}=(2(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ))^{10}=2^{10}(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ)$

$=1024\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=-512\sqrt{3}+512i$

$z^{-10}=(2(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ))^{-10}=2^{-10}(\cos(-150^\circ)+i\sin(-150^\circ))$

$=\dfrac{1}{1024}(\cos 150^\circ-i\sin 150^\circ)=\dfrac{1}{1024}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2048}-\dfrac{1}{2048}i$

(2) 由棣美弗定理的推廣

$z^{10}=(2(\cos 15^\circ-i\sin 15^\circ))^{10}=2^{10}(\cos 150^\circ-i\sin 150^\circ)$

$=1024\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=-512\sqrt{3}-512i$

例題9　棣美弗定理的應用（一）

試求下列各值：

(1) $(1+\sqrt{3}i)^{6}$。　　(2) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{6}$。

解　(1) 將 $1+\sqrt{3}i$ 寫成極式

$1+\sqrt{3}i=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

棣美弗定理　$(1+\sqrt{3}i)^{6}=\left(2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^{6}=2^{6}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=64(1+0i)=64$

(2) 分別將 $1+\sqrt{3}i$ 與 $1+i$ 寫成極式

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

棣美弗定理 $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^6=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right)^6=(\sqrt{2})^6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=8(0+i)=8i$

類題

試求下列各值：

(1) $(2-2\sqrt{3}i)^5$。　　(2) $\frac{(\cos 8°+i\sin 8°)^6(\cos 25°+i\sin 25°)^4}{(\cos 4°+i\sin 4°)^7}$。

解　(1) 將 $2-2\sqrt{3}i$ 寫成極式

$$2-2\sqrt{3}i=4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

棣美弗定理

$$(2-2\sqrt{3}i)^5=\left(4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\right)^5=4^5\left(\cos\frac{25\pi}{3}+i\sin\frac{25\pi}{3}\right)$$
$$=1024\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1024\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=512+512\sqrt{3}i$$

(2) $$\frac{(\cos 8°+i\sin 8°)^6(\cos 25°+i\sin 25°)^4}{(\cos 4°+i\sin 4°)^7}=\frac{(\cos 48°+i\sin 48°)^6(\cos 100°+i\sin 100°)}{(\cos 28°+i\sin 28°)}$$
$$=\cos 120°+i\sin 120°=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

例題10　棣美弗定理的應用（二）

設 n 為正整數，試求滿足 $(\sqrt{3}-i)^n$ 為實數的最小正整數 n。

解　將 $\sqrt{3}-i$ 寫成極式，$\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

$$\therefore(\sqrt{3}-i)^n=\left(2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)\right)^n=2^n\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\times n\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\times n\right)\right)$$

但 $(\sqrt{3}-i)^n$ 為實數　$\therefore \sin\left(\frac{11\pi}{6}\times n\right)$ 必須為 0 滿足此條件的最小正整數 n 為 6

類題

若$\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^n$是實數，且 n 為正整數，試求 n 的最小值。

解　將$\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$寫成極式

$$\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\therefore\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\times n\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\times n\right)\right)$$

但$\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^n$為實數　$\therefore\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\times n\right)$必須為 0　滿足此條件的最小正整數 n 為 12

主題四　複數的 n 次方根

1. 1 的 n 次方根有兩種表示方法：

(1) $\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$，$k=0$，1，2，……，$n-1$。

(2) 1，ω，ω^2，ω^3，……，ω^{n-1}，其中 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$。

2. 方根的性質：若 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，則

(1) $\omega^n=1$。

(2) $1+\omega+\omega^2+\cdots\cdots+\omega^{n-1}=0$。

說明：$1+\omega+\omega^2+\cdots\cdots+\omega^{n-1}=\dfrac{1-\omega^n}{1-\omega}=\dfrac{1-1}{1-\omega}=0$

(3) $(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots\cdots(z-\omega^{n-1})=z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots\cdots+z^2+z+1$。

說明：$z^n-1=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots\cdots+z+1)$ ……………… ①

又 $z^n-1=(z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots\cdots(z-\omega^{n-1})$ ……………… ②

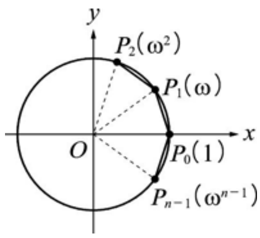
比較①與②得 $z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots\cdots+z+1=(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots\cdots(z-\omega^{n-1})$

3. n 次方根的幾何意義：若 $z^n=1$ 的 n 個根為 1，ω，ω^2，……，ω^{n-1}，則這 n 個根在複數平面上對應單位圓上 P_0，P_1，P_2，……，P_{n-1} 的 n 個等分點，可連成正 n 邊形，其中

(1) 正 n 邊形的面積為 $n\times\triangle OP_0P_1=n\times\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin\dfrac{2\pi}{n}=\dfrac{n}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$。

(2) 正 n 邊形的周長為 $n\times\overline{P_0P_1}$，其中$\overline{P_0P_1}^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos\dfrac{2\pi}{n}$（餘弦定理）

如下圖所示。



4. 複數的 n 次方根：任意非零的複數 α 也都有 n 個 n 次方根。
   若 $\alpha=|\alpha|\cdot(\cos\phi+i\sin\phi)$，則
   $z^n=\alpha$ 的根 z_0，z_1，z_2，……，z_{n-1} 可表示為下列形式：
   $z_k=\sqrt[n]{|\alpha|}\left(\cos\dfrac{\phi+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\phi+2k\pi}{n}\right)$，其中 $k=0$，1，2，……，$n-1$。

例題11　1 的 n 次方根

(1) 試求 1 的六次方根。

(2) 將 $z^6=1$ 的 6 個根描繪在複數平面上，並求此正六邊形的面積及周長。

注意　(1) 解 $z^n=1$，假設極式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 為 $z^n=1$ 的根，左式代棣美弗定理，右式將 1 化成極式。

(2) 若兩個極式相等 $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，則有絕對值相等 $r_1=r_2$，角度為同界角 $\theta_1=\theta_2+2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$ 的關係。

解　(1) 欲求 1 的六次方根，即求解 $z^6=1$

設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，由棣美弗定理可知 $z^6=r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)$

我們也將 1 寫成極式，$1=1\times(\cos 0+i\sin 0)$

故 $r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)=1\times(\cos 0+i\sin 0)$

可得 $\begin{cases} r^6=1,\ r\text{為正實數} \\ 6\theta=0+2k\pi,\ k\text{為整數} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\dfrac{2k\pi}{6},\ k\text{為整數} \end{cases}$

$\therefore$對於任意整數 k

$\cos\dfrac{2k\pi}{6}+i\sin\dfrac{2k\pi}{6}=\cos\dfrac{k\pi}{3}+i\sin\dfrac{k\pi}{3}$都是 1 的六次方根

取 $k=0$，得根 $\cos\dfrac{0\pi}{3}+i\sin\dfrac{0\pi}{3}=1$；取 $k=1$，得根 $\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$；

取 $k=2$，得根 $\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$；

取 $k=3$，得根 $\cos\dfrac{3\pi}{3}+i\sin\dfrac{3\pi}{3}=-1$；

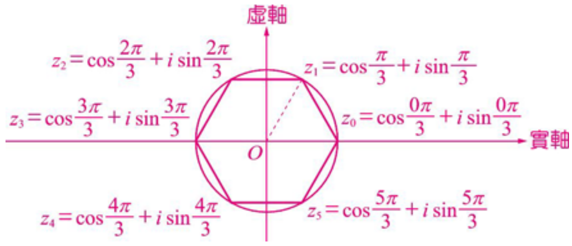
取 $k=4$，得根 $\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$；

取 $k=5$，得根 $\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

又 $k=6，7，8，\cdots\cdots$分別和 $k=0，1，2，\cdots\cdots$重複了

故 1 的六次方根為 $\cos\dfrac{k\pi}{3}+i\sin\dfrac{k\pi}{3}$，$k=0，1，2，3，4，5$

(2) 將這六個根描繪在複數平面上，如下圖所示：



此正六邊形的面積為 $6\times\left(\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=6\times\left(\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

若 z_0、z_1、z_2、z_3、z_4、z_5 在複數平面上的對應點分別為 P_0、P_1、P_2、P_3、P_4、P_5

則此正六邊形的周長為 $6\overline{P_0P_1}$

由餘弦定理可知 $\overline{P_0P_1}^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos\dfrac{\pi}{3}=1+1-1=1$　$\therefore 6\overline{P_0P_1}=6$

類題

(1) 試求 1 的五次方根。

(2) 將 $z^5=1$ 的 5 個根描繪在複數平面上。

解 (1) 欲求 1 的五次方根，即求解 $z^5=1$

設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，由棣美弗定理可知 $z^5=r^5(\cos5\theta+i\sin5\theta)$

我們也將 1 寫成極式，$1=1\times(\cos0+i\sin0)$，

故 $r^5(\cos5\theta+i\sin5\theta)=1\times(\cos0+i\sin0)$

可得 $\begin{cases} r^5=1, r\text{為正實數} \\ 5\theta=0+2k\pi, k\text{為整數} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\dfrac{2k\pi}{5}, k\text{為整數} \end{cases}$

$\therefore$對於任意整數 k,　$\cos\dfrac{2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{2k\pi}{5}$ 都是 1 的五次方根

取 $k=0$，得根 $\cos\dfrac{0\pi}{5}+i\sin\dfrac{0\pi}{5}=1$；取 $k=1$，得根 $\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$；

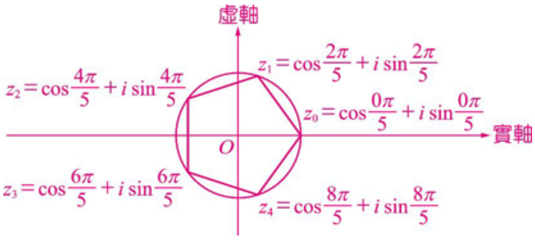
取 $k=2$，得根 $\cos\dfrac{4\pi}{5}+i\sin\dfrac{4\pi}{5}$；取 $k=3$，得根 $\cos\dfrac{6\pi}{5}+i\sin\dfrac{6\pi}{5}$；

取 $k=4$，得根 $\cos\dfrac{8\pi}{5}+i\sin\dfrac{8\pi}{5}$

又 $k=5，6，7，\cdots\cdots$分別和 $k=0，1，2，\cdots\cdots$重複了

故 1 的五次方根為 $\cos\dfrac{2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{2k\pi}{5}$，$k=0，1，2，3，4$

(2) 將這五個根描繪在複數平面上，如下圖所示：



形成一個正五邊形

例題12　方根的性質

令 $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，試求：

(1) ω^{50}。

(2) $1+\omega+\omega^2+\cdots\cdots+\omega^{49}$。

(3) $(3-\omega)(3-\omega^2)(3-\omega^3)(3-\omega^4)$。

注意　若 $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，則 $\omega^5=1$ 且 $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$。

解　由題意可知 ω 為 1 的五次方根，故 $\omega^5=1$，且 $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$

(1) $\omega^{50}=(\omega^5)^{10}=1^{10}=1$

(2) $1+\omega+\omega^2+\cdots\cdots+\omega^{49}$

$=(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)+(\omega^5+\omega^6+\omega^7+\omega^8+\omega^9)+\cdots\cdots+(\omega^{45}+\omega^{46}+\omega^{47}+\omega^{48}+\omega^{49})$

$=(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)+\omega^5(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)+\cdots\cdots+\omega^{45}(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)$

$=0+0+\cdots\cdots+0=0$

(3) 1 的五次方根為 $1，\omega，\omega^2，\omega^3，\omega^4$

即 $z^5-1=(z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)(z-\omega^4)$

$\frac{z^5-1}{z-1}=(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)(z-\omega^4)$

$z^4+z^3+z^2+z+1=(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)(z-\omega^4)$

令 $z=3$，可得 $(3-\omega)(3-\omega^2)(3-\omega^3)(3-\omega^4)=3^4+3^3+3^2+3+1=121$

類題

令 $\omega=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$，試求：

(1) $1+\omega+\omega^2+\cdots\cdots+\omega^{49}$。

(2) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)(1-\omega^5)(1-\omega^6)$。

(3) $|1-\omega||1-\omega^2||1-\omega^3||1-\omega^4||1-\omega^5||1-\omega^6|$。

解　由題意可知 ω 為 1 的七次方根，則 $\omega^7=1$ 且 $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6=0$

(1) $1+\omega+\omega^2+\cdots\cdots+\omega^{49}$

$=(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6)+(\omega^7+\omega^8+\omega^9+\omega^{10}+\omega^{11}+\omega^{12}+\omega^{13})+\cdots\cdots+(\omega^{42}+\omega^{43}+\omega^{44}+\omega^{45}+\omega^{46}+\omega^{47}+\omega^{48})+\omega^{49}$

$=0+0+\cdots\cdots+0+1=1$

(2) 1 的七次方根為 $1，\omega，\omega^2，\omega^3，\omega^4，\omega^5，\omega^6$

即 $z^7-1=(z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)(z-\omega^4)(z-\omega^5)(z-\omega^6)$

$$\frac{z^7-1}{z-1}=(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)(z-\omega^4)(z-\omega^5)(z-\omega^6)$$

$$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$$
$$=(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)(z-\omega^4)(z-\omega^5)(z-\omega^6)$$

令 $z=1$，可得 $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)(1-\omega^5)(1-\omega^6)=7$

(3) 由(2)可知 $|(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)(1-\omega^5)(1-\omega^6)|=7$

而由複數絕對值的性質可得

$|(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)(1-\omega^5)(1-\omega^6)|$

$=|1-\omega||1-\omega^2||1-\omega^3||1-\omega^4||1-\omega^5||1-\omega^6|=7$

例題13　複數的 n 次方根

(1) 試求 $8+8\sqrt{3}i$ 的四次方根。

(2) 將 $z^4=8+8\sqrt{3}i$ 的 4 個根描繪在複數平面上，並求此四邊形的面積及周長。

注意　(1) 解 $z^n=a$，假設極式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 為 $z^n=a$ 的根，左式代棣美弗定理，右式將 a 化成極式。

(2) 若兩個極式相等 $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，則有絕對值相等 $r_1=r_2$，角度為同界角 $\theta_1=\theta_2+2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$ 的關係。

解　(1) 欲求 $8+8\sqrt{3}i$ 的四次方根，即求解 $z^4=8+8\sqrt{3}i$

設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，由棣美弗定理可知 $z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$

我們也將 $8+8\sqrt{3}i$ 寫成極式，

$$8+8\sqrt{3}i=16\times\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

故 $r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=16\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

可得 $\begin{cases} r^4=16,\ r\text{為正實數} \\ 4\theta=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\text{為整數}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} r=2 \\ \theta=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\text{為整數}\end{cases}$

$\therefore$對於任意整數 k

$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)\right)$都是 $8+8\sqrt{3}i$ 的四次方根

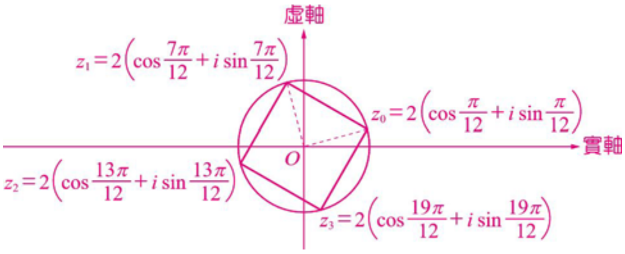
取 $k=0$，得根 $2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$；取 $k=1$，得根 $2\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

取 $k=2$，得根 $2\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$；取 $k=3$，得根 $2\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$

又 $k=4$，5，6，……分別和 $k=0$，1，2，……重複了

故 $8+8\sqrt{3}\,i$ 的四次方根為$2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}\right)\right)$，$k=0$，1，2，3

(2) 將這四個根描繪在複數平面上，如下圖所示：



此正方形的面積為$4\times\left(\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sin90^\circ\right)=8$　　而此正方形的周長為$4\sqrt{2^2+2^2}=8\sqrt{2}$

類題

(1) 試求 i 的四次方根。

(2) 將 $z^4=i$ 的 4 個根描繪在複數平面上，並求此四邊形的面積及周長。

解　(1) 欲求 i 的四次方根，即求解 $z^4=i$

設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，由棣美弗定理可知 $z^4=r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)$

我們也將 i 寫成極式，$i=1\times\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

故 $r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)=1\times\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

可得$\begin{cases}r^4=1,\ r\text{為正整數}\\4\theta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\text{為整數}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=1\\\theta=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\text{為整數}\end{cases}$

$\therefore$對於任意整數 k

$\cos\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\right)$都是 i 的四次方根

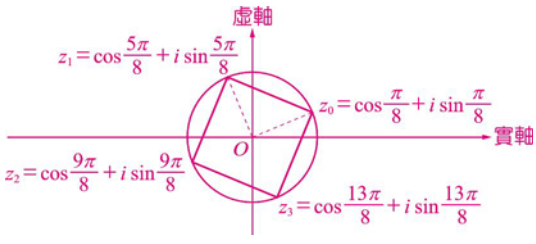
取 $k=0$，得根 $\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}$；取 $k=1$，得根 $\cos\dfrac{5\pi}{8}+i\sin\dfrac{5\pi}{8}$

取 $k=2$，得根 $\cos\dfrac{9\pi}{8}+i\sin\dfrac{9\pi}{8}$；取 $k=3$，得根 $\cos\dfrac{13\pi}{8}+i\sin\dfrac{13\pi}{8}$

又 $k=4$，5，6，……分別和 $k=0$，1，2，……重複了

故 i 的四次方根為$\cos\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\right)$，$k=0$，1，2，3

(2) 將這四個根描繪在複數平面上，如下圖所示



此正方形的面積為 $4\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin 90^\circ\right)=2$　　而此正方形的周長為 $4\sqrt{1^2+1^2}=4\sqrt{2}$

例題14　複數的平方根

試求 $8-6i$ 的平方根。

注意　(1) 設平方根為 $a+bi$，則 $(a+bi)^2=8-6i$，展開後比較係數。

(2) 也可利用棣美弗定理。

解　設 $(a+bi)^2=8-6i$，兩邊展開比較係數得

$$\begin{cases} a^2-b^2=8 \cdots\cdots ① \\ 2ab=-6 \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$$

利用 $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$，可得

$a^2+b^2=10 \cdots\cdots ③$

由①與③解得 $a^2=9$，$b^2=1$

但因為 $2ab=-6$，得兩組解 $\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-3 \\ b=1 \end{cases}$　　故 $8-6i$ 的平方根為 $3-i$ 或 $-3+i$

類題

試求 $-21-20i$ 的平方根。

解　設 $(a+bi)^2=-21-20i$，兩邊展開比較係數得

$$\begin{cases} a^2-b^2=-21 \cdots\cdots ① \\ 2ab=-20 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

利用 $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$，可得

$a^2+b^2=29 \cdots\cdots ③$

由①與③解得 $a^2=4$，$b^2=25$

但因為 $2ab=-20$，得兩組解 $\begin{cases} a=2 \\ b=-5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases}$

故 $-21-20i$ 的平方根為 $2-5i$ 或 $-2+5i$

重要性：★★★★★

2-3　段考實力演練

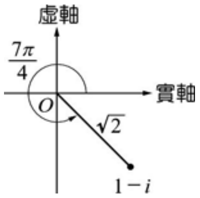
一、基礎題

1. 將下列複數寫成極式：

(1) $1-i$。　　(2) $-3i$。

(3) $\sin 50^\circ+i\cos 50^\circ$。　　(4) $\sin 40^\circ-i\cos 40^\circ$。

解　(1)

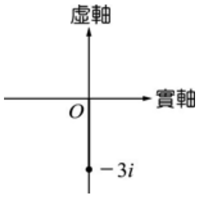


如上圖

$\because \mid 1-i \mid = \sqrt{2}$

$\therefore 1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(2)



如上圖

$\because \mid -3i \mid = 3$

$\therefore -3i=3(0-i)=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

(3) $\sin 50°+i\cos 50°=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\therefore r=1$ 且 $\begin{cases}\cos\theta=\sin 50°\\ \sin\theta=\cos 50°\end{cases}$

$\therefore \theta$ 為第一象限角，取 $0°\leqq\theta<360°$　　則 $\theta=40°$

故 $\sin 50°+i\cos 50°=\cos 40°+i\sin 40°$

(4) $\sin 40°-i\cos 40°=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\therefore r=1$ 且 $\begin{cases}\cos\theta=\sin 40°\\ \sin\theta=-\cos 40°\end{cases}$

$\therefore \theta$ 為第四象限角，取 $0°\leqq\theta<360°$　　則 $\theta=270°+40°=310°$

故 $\sin 40°-i\cos 40°=\cos 310°+i\sin 310°$

2. 試求下列各值：

(1) $(1-i)^{10}$。　　(2) $\frac{(\sqrt{3}+i)^5}{-1+\sqrt{3}i}$。

(3) $(\sin 75°+i\cos 75°)^{20}$。　　(4) $(\cos 170°+i\sin 170°)(\cos 35°-i\sin 35°)$。

解　(1) 將 $1-i$ 寫成極式

$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

由棣美弗定理得 $\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^{10}=(\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{35\pi}{2}+i\sin\frac{35\pi}{2}\right)$

$=32\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-32i$

(2) 將 $\sqrt{3}+i$ 寫成極式 $\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

由棣美弗定理得

$$(\sqrt{3}+i)^5=\left(2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^5=2^5\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=32\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

再將 $-1+\sqrt{3}i$ 寫成極式 $-1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\therefore \frac{(\sqrt{3}+i)^5}{-1+\sqrt{3}i}=\frac{32\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}{2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}=16\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$
$$=8\sqrt{3}+8i$$

(3) 將 $\sin 75°+i\cos 75°$ 寫成極式

$$\sin 75°+i\cos 75°=\cos 15°+i\sin 15°=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$$

由棣美弗定理得 $(\sin 75°+i\cos 75°)^{20}=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{20}$

$$=\cos\frac{20\pi}{12}+i\sin\frac{20\pi}{12}=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$$
$$=\cos 300°+i\sin 300°=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(4) $(\cos 170°+i\sin 170°)(\cos 35°-i\sin 35°)$

$=(\cos 170°+i\sin 170°)\times(\cos(-35°)+i\sin(-35°))$

$=\cos(170°-35°)+i\sin(170°-35°)$

$=\cos 135°+i\sin 135°$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

3. 設 $z=(1+i)^6(\sqrt{3}-i)^4$，試求 $|z|$ 之值。

解 利用複數絕對值的運算性質

$|z_1\cdot z_2|=|z_1||z_2|$

$|z|=|(1+i)^6(\sqrt{3}-i)^4|$

$=|(1+i)^6|\cdot|(\sqrt{3}-i)^4|$

$=|1+i|^6\cdot|\sqrt{3}-i|^4=(\sqrt{2})^6\cdot 2^4=2^7=128$

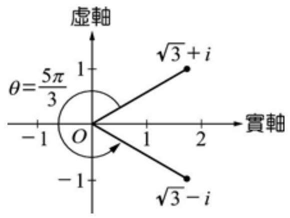
4. 已知（$\sqrt{3}+i$）（$\cos\theta+i\sin\theta$）$=\sqrt{3}-i$，試問 θ 為第幾象限角？

解　∵（$\sqrt{3}+i$）（$\cos\theta+i\sin\theta$）$=\sqrt{3}-i$

$$\therefore \cos\theta+i\sin\theta=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}$$

$$=\frac{2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}=\cos\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)$$

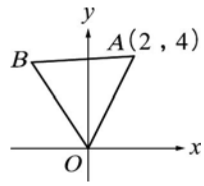
$$=\cos\frac{10\pi}{6}+i\sin\frac{10\pi}{6}=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$$



將一複數 $\sqrt{3}+i$ 乘上極式（$\cos\theta+i\sin\theta$）後得到 $\sqrt{3}-i$，表示長度不變

角度逆時針旋轉 $\frac{5\pi}{3}$，故 $\theta=\frac{5\pi}{3}$　　而 $\frac{5\pi}{3}$ 為第四象限角，故 θ 為第四象限角

5. 如下圖，A 點坐標為（2，4）且△AOB 是正三角形，試求 B 點坐標。



解　視 A 點代表複數 $2+4i$

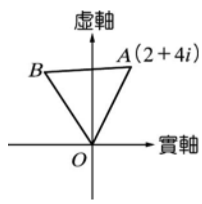
如右圖所示：

B 點可由 A 點繞原點逆時針旋轉 60° 而得

故 B 點所代表的複數為

$$(2+4i)(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=(2+4i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=(1-2\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})i$$

故 B 點坐標為（$1-2\sqrt{3}$，$2+\sqrt{3}$）



6. 設 $\omega=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$，試求下列各式的值：

(1) ω^3。　　(2) $1+\omega+\omega^2$。

(3) $1+\omega+\omega^2+\cdots\cdots+\omega^{2012}$。　　(4) $1-\omega+\omega^2-\omega^3+\omega^4-\cdots\cdots+\omega^{12}$。

解　(1) 由棣美弗定理知 ω 為 1 的三次方根

故 $\omega^3=1$

(2) $\omega^3=1 \Rightarrow \omega^3-1=0 \Rightarrow (\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$，但 $\omega\neq 1$

$\therefore 1+\omega+\omega^2=0$

(3) $1+\omega+\omega^2+\cdots\cdots+\omega^{2012}$

$=(1+\omega+\omega^2)+(\omega^3+\omega^4+\omega^5)+\cdots\cdots+(\omega^{2010}+\omega^{2011}+\omega^{2012})$

$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots\cdots+\omega^{2010}(1+\omega+\omega^2)=0$

(4) $1-\omega+\omega^2-\omega^3+\omega^4-\cdots\cdots+\omega^{12}=\dfrac{[1-(-\omega)^{13}]}{1-(-\omega)}=\dfrac{1+\omega^{13}}{1+\omega}=\dfrac{1+\omega}{1+\omega}=1$

7. (1) 試求 1 的八次方根。

(2) 將 $z^8=1$ 的 8 個根描繪在複數平面上，並求此正八邊形的面積。

解　(1) 欲求 1 的八次方根，即求解 $z^8=1$

設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

棣美弗定理 $z^8=r^8(\cos 8\theta+i\sin 8\theta)$

將 1 寫成極式 $1=1\times(\cos 0+i\sin 0)$

故 $r^8(\cos 8\theta+i\sin 8\theta)=1\times(\cos 0+i\sin 0)$

可得 $\begin{cases} r^8=1\text{，}r\text{為正實數} \\ 8\theta=0+2k\pi,\ k\text{為整數} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\dfrac{2k\pi}{8} \end{cases}$，$k$ 為整數

$\therefore$對於任意整數 k　$,\cos\dfrac{2k\pi}{8}+i\sin\dfrac{2k\pi}{8}=\cos\dfrac{k\pi}{4}+i\sin\dfrac{k\pi}{4}$　都是 1 的八次方根

取 $k=0$，得根 $\cos\dfrac{0\pi}{4}+i\sin\dfrac{0\pi}{4}=1$

取 $k=1$，得根 $\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

取 $k=2$，得根 $\cos\dfrac{2\pi}{4}+i\sin\dfrac{2\pi}{4}=i$

取 $k=3$，得根 $\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

取 $k=4$，得根 $\cos\dfrac{4\pi}{4}+i\sin\dfrac{4\pi}{4}=-1$

取 $k=5$，得根 $\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

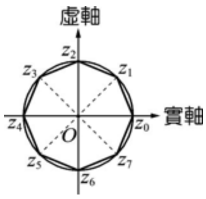
取 $k=6$，得根 $\cos\dfrac{6\pi}{4}+i\sin\dfrac{6\pi}{4}=-i$

取 $k=7$，得根 $\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

又 $k=8$，9，10，……分別和 $k=0$，1，2，……重複了

故 1 的八次方根為 $\cos\dfrac{k\pi}{4}+i\sin\dfrac{k\pi}{4}$　　$k=0$，1，2，3，4，5，6，7

(2)



將這八個根描繪在複數平面上

如上圖所示：

$z_k = \cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}$　　$k=0$，1，2，3，4，5，6，7

此正八邊形的面積為 $8\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\frac{\pi}{4}\right)=8\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}$

8. 試求 $-8i$ 的平方根。

解　設 $(a+bi)^2=-8i$

兩邊展開比較係數得

$$\begin{cases} a^2-b^2=0 \cdots\cdots ① \\ 2ab=-8 \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$$

利用 $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$

可得 $a^2+b^2=8 \cdots\cdots\cdots$ ③

由①與③解得 $a^2=4$，$b^2=4$

但因為 $2ab=-8$

得兩組解 $\begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases}$

故 $-8i$ 的平方根為 $2-2i$ 或 $-2+2i$

二、進階題

9. 試求 i 的三次方根。（提示：利用棣美弗定理）

解　欲求 i 的三次方根，即求解 $z^3=i$

設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

棣美弗定理 $z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$

將 i 寫成極式 $i=0+1\times i=1\times\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

故 $r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=1\times\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

可得 $\begin{cases} r^3=1\text{，}r\text{為正實數} \\ 3\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\text{為整數} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3},\ k\text{為整數} \end{cases}$

$\therefore$ 對於任意整數 k　$\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right)$　都是 i 的三次方根

取 $k=0$，得根 $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

取 $k=1$，得根 $\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

取 $k=2$，得根 $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$

又 $k=3$，4，5，……分別和 $k=0$，1，2，……重複了

故 i 的三次方根為 $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，$-i$

10. 化簡 $\dfrac{1+i\tan\frac{\pi}{8}}{1-i\tan\frac{\pi}{8}}$。$\left(提示：\tan\frac{\pi}{8}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}\right)$

解

$$\frac{1+i\tan\frac{\pi}{8}}{1-i\tan\frac{\pi}{8}}=\frac{1+i\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}\right)}{1-i\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}\right)}=\frac{\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}}=\frac{\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{8}-\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}-\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

11. 設 $\left|\frac{z-1}{z}\right|=\frac{1}{2}$ 且 $\frac{z-1}{z}$ 的主輻角為 $\frac{\pi}{3}$，試求複數 z。$\left(提示：\frac{z-1}{z}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)$

解 $\frac{z-1}{z}$ 的“向徑”為 $\frac{1}{2}$，“主輻角”為 $\frac{\pi}{3}$

將 $\frac{z-1}{z}$ 寫成極式為 $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$\therefore \frac{z-1}{z}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i=\frac{1+\sqrt{3}i}{4}$$

又 $\frac{z-1}{z}=1-\frac{1}{z}=\frac{1+\sqrt{3}i}{4}$

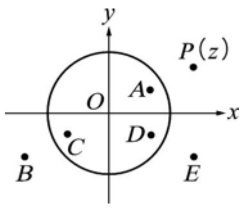
$$\therefore \frac{1}{z}=1-\frac{1+\sqrt{3}i}{4}=\frac{3-\sqrt{3}i}{4}$$

故 $z=\dfrac{4}{3-\sqrt{3}i}=\dfrac{4(3+\sqrt{3}i)}{(3-\sqrt{3}i)(3+\sqrt{3}i)}=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{3}$

三、歷屆試題

12. 若 $(4+3i)(\cos\theta+i\sin\theta)$ 為小於 0 的實數，則 θ 是第幾象限角？
(A)第一象限角　(B)第二象限角　(C)第三象限角
(D)第四象限角　(E)條件不足，無法判斷　92.學測
（提示：複數極式乘法的幾何意義）

13. 如下圖，複數 z 在平面上對應的點 P 在單位圓 O 的外部，問複數 $\frac{1}{z}$ 對應的點大概是哪一點？



(A) A　(B) B　(C) C　(D) D　(E) E
$\left(提示：z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\Rightarrow\frac{1}{z}=\frac{1}{r}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]\right)$　92.學測補考

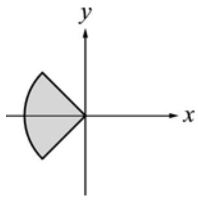
14. 若複數 z 與 $\sqrt{3}+i$ 之積為 $-2\sqrt{3}+2i$，則 z 的主輻角為＿＿＿＿。　86.自然組

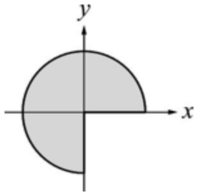
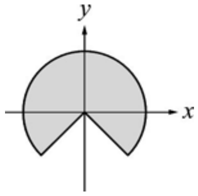
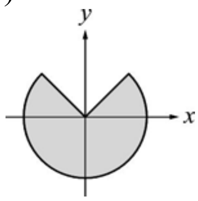
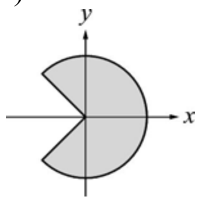
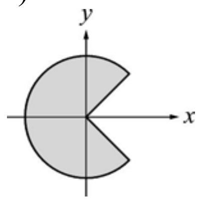
$\left(提示：z=\frac{-2\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+i}\right)$

15. 設 $z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$，試問複數 $1-z$ 的絕對值為以下哪一個選項？
(A) $2\sin\frac{\pi}{7}$　(B) $\sin\frac{2\pi}{7}$　(C) $\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{7}$　(D) $\sqrt{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)$　(E) $\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{7}}$
96.指考甲

$\left(提示：\sin\frac{\pi}{7}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{2\pi}{7}}{2}}\right)$

16. 下圖陰影部分所示為複數平面上區域
$A=\left\{z:z=r(\cos\theta+i\sin\theta),0\le r\le 1,\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}\right\}$ 之略圖。
令 $D=\{w：w=z^3，z\in A\}$，試問下列選項中之略圖，何者之陰影部分與區域 D 最接近？　93.學測



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

（提示：利用棣美弗定理）

17. 複數 $z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$、$z_2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$與它們的乘積 z_1z_2 在複數平面上對應的點分別為 P、Q 與 R。則$\angle QPR$ 等於下列哪一個選項？

(A) $\frac{\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{10}$ (C) $\frac{\pi}{9}$ (D) $\frac{\pi}{8}$ (E) $\frac{\pi}{6}$ 98.指考甲

$\left(\text{提示：}\angle QPR=\frac{1}{2}\overset{\frown}{RQ}\text{ 所對應的圓周角}\right)$

18. 設 O、A、B 分別為複數平面上代表 0、$1+i$ 以及 $1-i$ 的點。請問下列哪些選項所對應的點落在$\triangle OAB$ 的內部？

(A) $\cos 60°$ (B) $\cos 50°+i\sin 50°$ (C) $\frac{4-3i}{5}$

(D) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ (E) $(\cos 30°+i\sin 30°)^{25}$ 100.學測

（提示：寫成複數的極式並利用棣美弗定理)

19. 設 O 為複數平面上的原點，並令點 A、B 分別代表非零複數 z、w。若$\angle AOB=90°$，則下列哪些選項必為<u>負實數</u>？

(A) $\frac{z}{w}$ (B) zw (C) $(zw)^2$

(D) $\frac{z^2}{w^2}$ (E) $(z\overline{w})^2$（其中 $\overline{w}$ 為 w 的共軛複數） 101.學測

簡 答

一、基礎題

1.(1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$；(2) $3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$；(3) $\cos 40°+i\sin 40°$；(4) $\cos 310°+i\sin 310°$ 2.(1) $-32i$；(2) $8\sqrt{3}+8i$；(3) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$；(4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

3.128 4.第四象限角 5.（$1-2\sqrt{3}$，$2+\sqrt{3}$） 6.(1) 1；(2) 0；(3) 0；(4) 1

7.(1) $\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}$，$k=0$，1，2，3，4，5，6，7；(2) 圖略，$2\sqrt{2}$

8.$2-2i$ 或 $-2+2i$

二、進階題

9.$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，$-i$ 10.$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ 11.$\frac{3+\sqrt{3}i}{3}$

三、歷屆試題

12.(B) 13.(D) 14.$\frac{2\pi}{3}$ 15.(A) 16.(E) 17.(D) 18.(A)(C)(E) 19.(D)(E)

能力提升特訓

範例1　棣美弗定理的應用

設 n 是正整數，若 $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$，試證：$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta$。

注意　棣美弗定理。

證　$\because z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \Rightarrow z^2-2\cos\theta\, z+1=0$

$\therefore z=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta-4}}{2}=\cos\theta\pm i\sin\theta$

(1) 當 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ 時，$\frac{1}{z}=\cos\theta-i\sin\theta$

由棣美弗定理可知：$z^n+\frac{1}{z^n}=\cos n\theta+i\sin n\theta+\cos n\theta-i\sin n\theta=2\cos n\theta$

(2) 當 $z=\cos\theta-i\sin\theta$ 時，$\frac{1}{z}=\cos\theta+i\sin\theta$

由棣美弗定理可知：$z^n+\frac{1}{z^n}=\cos n\theta-i\sin n\theta+\cos n\theta+i\sin n\theta=2\cos n\theta$

由(1)與(2)得證 $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta$

類題

設 $z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}$，試求 $z^{2012}+\frac{1}{z^{2012}}$ 的值。

解　$z+\frac{1}{z}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\cos\frac{\pi}{6}$

$\therefore z^{2012}+\frac{1}{z^{2012}}=2\cos\left(2012\times\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(\frac{1006\pi}{3}\right)=2\cos\frac{4\pi}{3}=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

範例2　根與複數平面

試解出 $x^6+x^4+x^2+1=0$ 的六個根，並將這六個根描繪在複數平面上，求此六邊形的面積。

注意　$(x^2-1)(x^6+x^4+x^2+1)=x^8-1$。

解　$(x^2-1)(x^6+x^4+x^2+1)=x^8-1$

1 的八次方根可表示為 $1，\omega，\omega^2，\omega^3，\omega^4，\omega^5，\omega^6，\omega^7$，其中 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{8}+i\sin\dfrac{2\pi}{8}$

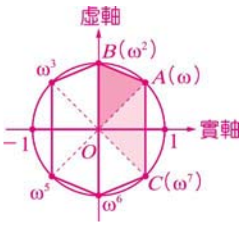
扣除 1 及 -1 (ω^4)， $\omega，\omega^2，\omega^3，\omega^5，\omega^6，\omega^7$ 為方程式 $x^6+x^4+x^2+1=0$ 的六個根

此六根在複數平面上的位置，如下圖所示

此六邊形的面積為 $4\triangle OAB+2\triangle OAC$

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，而$\triangle OAC=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin 90°=\dfrac{1}{2}$

故此六邊形的面積為 $4\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}+2\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{2}+1$



類題

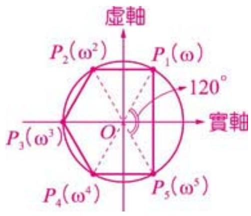
試解出 $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 的五個根，並將這五個根描繪在複數平面上，求此五邊形的面積。

解　$x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

1 的六次方根可表示為 $1，\omega，\omega^2，\omega^3，\omega^4，\omega^5$，其中 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{6}+i\sin\dfrac{2\pi}{6}$

故 $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 的五個根為 $\omega，\omega^2，\omega^3，\omega^4，\omega^5$

此五根在複數平面上的位置，如下圖所示



此五邊形的面積為 $4\triangle OP_1P_2+\triangle OP_1P_5$

$\triangle OP_1P_2=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，而$\triangle OP_1P_5=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin 120°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

故此五邊形的面積為$4\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

歷屆試題

若 z 為複數，且滿足 $z+\dfrac{1}{z}=1$，則 $z^{101}+\dfrac{1}{z^{101}}=$______。　82.社會組

解　$\because z+\dfrac{1}{z}=2\times\dfrac{1}{2}=2\cos\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore z^{101}+\dfrac{1}{z^{101}}=2\cos\left(101\times\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos\dfrac{101\pi}{3}=2\cos\dfrac{5\pi}{3}=2\times\dfrac{1}{2}=1$