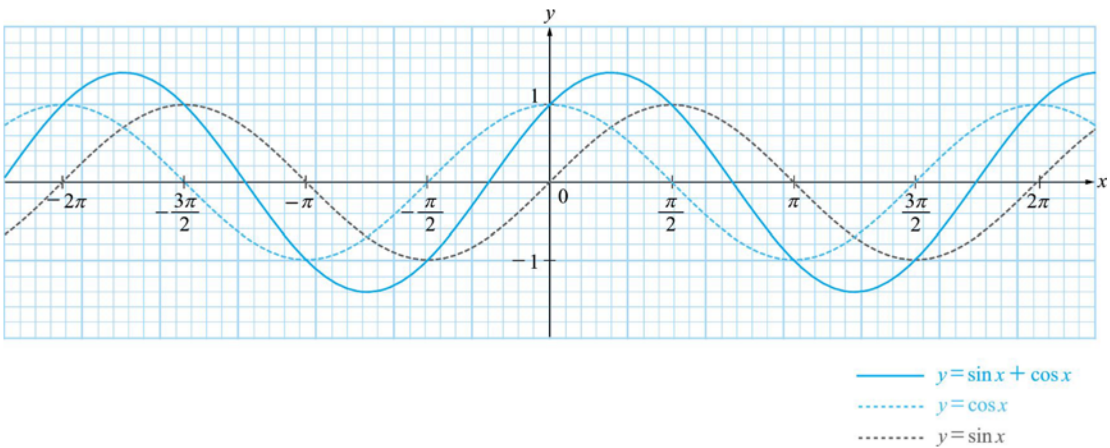
2-2　三角函數的應用

主題一　正、餘弦函數的疊合

1. 和角與差角公式：
   $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。
   $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$。
   $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。
   $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。
2. $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$
   (1) 代數觀點：正、餘弦函數疊合後，週期仍為 2π，但振幅變為$\sqrt{2}$ 。
   (2) 幾何觀點：正、餘弦函數疊合的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形先向左平移$\dfrac{\pi}{4}$單位，再將振幅放大$\sqrt{2}$倍而得，$y=\sin x$、$y=\cos x$ 與 $y=\sin x+\cos x$ 三個圖形的關係如下：



   (3) 物理觀點：$y=\sin x$ 與 $y=\cos x$ 這兩個週期相同的波互相疊合後，仍會形成一個相同週期的波，強度會增大，此即物理學上的“共振”現象。
3. 正、餘弦疊合成正弦函數：
   設 a，b 是不全為 0 的實數，則 $a\sin x+b\cos x=r\sin(x+\theta)$，
   其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，$0\le\theta<2\pi$ 且滿足 $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$。
4. 正、餘弦疊合成餘弦函數：
   設 a，b 是不全為 0 的實數，則 $a\sin x+b\cos x=r\cos(x+\phi)$，
   其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，$0\le\phi<2\pi$ 且滿足 $\sin\phi=-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\phi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

例題1　正、餘弦函數的疊合（$y=r\sin(x+\theta)$形式）

(1) 將 $y=\sin x-\cos x$ 表示成 $y=r\sin(x+\theta)$ 的形式，其中 $r>0$ 且 $0\le\theta<2\pi$。

(2) 將 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 表示成 $y=r\sin(x+\theta)$ 的形式，其中 $r>0$ 且 $0\le\theta<2\pi$。

解　(1) 依題意並利用和角公式得

$$\sin x-\cos x=r\sin(x+\theta)=r(\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta)$$
$$=(r\cos\theta)\sin x+(r\sin\theta)\cos x$$

比較等式兩邊有 $\begin{cases} r\cos\theta=1 & \cdots\cdots① \\ r\sin\theta=-1 & \cdots\cdots② \end{cases}$

$①^2+②^2$ 可得 $r^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=1^2+(-1)^2=2$

故 $r=\sqrt{2}$，代回①與②得 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\sin\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$　$\therefore\theta$ 為第四象限角 $\dfrac{7\pi}{4}$

因此 $y=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{7\pi}{4}\right)$

(2) 依題意並利用和角公式得

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=r\sin(x+\theta)=r(\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta)$$
$$=(r\cos\theta)\sin x+(r\sin\theta)\cos x$$

比較等式兩邊有 $\begin{cases} r\cos\theta=1 & \cdots\cdots① \\ r\sin\theta=-\sqrt{3} & \cdots\cdots② \end{cases}$

$①^2+②^2$ 可得 $r^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=1^2+(-\sqrt{3})^2=4$

故 $r=2$，代回①與②得 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 且 $\sin\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$　$\therefore\theta$ 為第四象限角 $\dfrac{5\pi}{3}$

因此 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{5\pi}{3}\right)$

類題

(1) 將 $y=-\sin x+\cos x$ 表示成 $y=r\sin(x+\theta)$ 的形式，其中 $r>0$ 且 $0\le\theta<2\pi$。

(2) 將 $y=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 表示成 $y=r\sin(x+\theta)$ 的形式，其中 $r>0$ 且 $0\le\theta<2\pi$。

解　(1) 依題意並利用和角公式得

$$-\sin x+\cos x=r\sin(x+\theta)=r(\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta)$$
$$=(r\cos\theta)\sin x+(r\sin\theta)\cos x$$

比較等式兩邊有 $\begin{cases} r\cos\theta=-1 & \cdots\cdots① \\ r\sin\theta=1 & \cdots\cdots② \end{cases}$

$①^2+②^2$ 可得 $r^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=(-1)^2+1^2=2$

故 $r=\sqrt{2}$，代回①與②得 $\cos\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ 且 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\therefore\theta$ 為第二象限角 $\dfrac{3\pi}{4}$

因此 $y=-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$

(2) 依題意並利用和角公式得

$-\sin x+\sqrt{3}\cos x=r\sin(x+\theta)=r(\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta)$

$=(r\cos\theta)\sin x+(r\sin\theta)\cos x$

比較等式兩邊有$\begin{cases} r\cos\theta=-1\cdots\cdots① \\ r\sin\theta=\sqrt{3}\cdots\cdots② \end{cases}$

$①^2+②^2$ 可得 $r^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=(-1)^2+(\sqrt{3})^2=4$

故 $r=2$，代回①與②得 $\cos\theta=\dfrac{-1}{2}$ 且 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\therefore\theta$ 為第二象限角 $\dfrac{2\pi}{3}$

因此 $y=-\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$

例題2　正、餘弦函數的疊合（$y=r\cos(x+\phi)$ 形式）

(1) 將 $y=\sin x-\cos x$ 表示成 $y=r\cos(x+\phi)$ 的形式，其中 $r>0$ 且 $0\le\phi<2\pi$。

(2) 將 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 表示成 $y=r\cos(x+\phi)$ 的形式，其中 $r>0$ 且 $0\le\phi<2\pi$。

解　(1) 依題意並利用和角公式得

$\sin x-\cos x=r\cos(x+\phi)=r(\cos x\cos\phi-\sin x\sin\phi)$

$=(-r\sin\phi)\sin x+(r\cos\phi)\cos x$

比較等式兩邊有$\begin{cases} -r\sin\phi=1\quad\cdots\cdots① \\ r\cos\phi=-1\quad\cdots\cdots② \end{cases}$

$①^2+②^2$ 可得 $r^2=(-r\sin\phi)^2+(r\cos\phi)^2=1^2+(-1)^2=2$

故 $r=\sqrt{2}$，代回①與②得 $\sin\phi=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ 且 $\cos\phi=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$　$\therefore\phi$ 為第三象限角 $\dfrac{5\pi}{4}$

因此 $y=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{5\pi}{4}\right)$

(2) 依題意並利用和角公式得

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=r\cos(x+\phi)=r(\cos x\cos\phi-\sin x\sin\phi)$

$=(-r\sin\phi)\sin x+(r\cos\phi)\cos x$

比較等式兩邊有$\begin{cases} -r\sin\phi=1\quad\cdots\cdots\cdots① \\ r\cos\phi=-\sqrt{3}\quad\cdots\cdots② \end{cases}$

$①^2+②^2$ 可得 $r^2=(-r\sin\phi)^2+(r\cos\phi)^2=1^2+(-\sqrt{3})^2=4$

故 $r=2$，代回①與②得 $\sin\phi=\dfrac{-1}{2}$ 且 $\cos\phi=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$　$\therefore\phi$ 為第三象限角 $\dfrac{7\pi}{6}$

因此 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\cos\left(x+\dfrac{7\pi}{6}\right)$

類題

(1) 將 $y=-\sin x+\cos x$ 表示成 $y=r\cos(x+\phi)$ 的形式，其中 $r>0$ 且 $0\leq\phi<2\pi$。

(2) 將 $y=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 表示成 $y=r\cos(x+\phi)$ 的形式，其中 $r>0$ 且 $0\leq\phi<2\pi$。

解　(1) 依題意並利用和角公式得

$$-\sin x+\cos x=r\cos(x+\phi)=r(\cos x\cos\phi-\sin x\sin\phi)$$
$$=(-r\sin\phi)\sin x+(r\cos\phi)\cos x$$

比較等式兩邊有 $\begin{cases}-r\sin\phi=-1\cdots\cdots①\\ r\cos\phi=1\cdots\cdots\cdots②\end{cases}$

$①^2+②^2$ 可得 $r^2=(-r\sin\phi)^2+(r\cos\phi)^2=(-1)^2+1^2=2$

故 $r=\sqrt{2}$，代回①與②得 $\sin\phi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\cos\phi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\therefore\phi$ 為第一象限角 $\dfrac{\pi}{4}$

因此 $y=-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) 依題意並利用和角公式得

$$-\sin x+\sqrt{3}\cos x=r\cos(x+\phi)=r(\cos x\cos\phi-\sin x\sin\phi)$$
$$=(-r\sin\phi)\sin x+(r\cos\phi)\cos x$$

比較等式兩邊有 $\begin{cases}-r\sin\phi=-1\cdots\cdots①\\ r\cos\phi=\sqrt{3}\ \cdots\cdots②\end{cases}$

$①^2+②^2$ 可得 $r^2=(-r\sin\phi)^2+(r\cos\phi)^2=(-1)^2+(\sqrt{3})^2=4$

故 $r=2$，代回①與②得 $\sin\phi=\dfrac{1}{2}$，$\cos\phi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\therefore\phi$ 為第一象限角 $\dfrac{\pi}{6}$

因此 $y=-\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

例題3　極值問題(一)

(1) 試求 $y=3\sin x-4\cos x$ 的最大值和最小值。

(2) 試求 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的最大值和最小值，並求最大值和最小值發生時 x 的值。

解　(1) 由疊合公式可知 $y=3\sin x-4\cos x=5\sin(x+\theta)$，其中 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ 且 $\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$

又 $-1\leq\sin(x+\theta)\leq 1$

$\therefore -5\leq 5\sin(x+\theta)\leq 5$，故 y 的最大值為 5，最小值為 -5

(2) 由疊合公式可知 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{5\pi}{3}\right)$

又 $-1\leq\sin\left(x+\dfrac{5\pi}{3}\right)\leq 1$　$\therefore -2\leq 2\sin\left(x+\dfrac{5\pi}{3}\right)\leq 2$，

故 y 的最大值為 2，最小值為 -2

① 當 y 的最大值發生時，$\sin\left(x+\dfrac{5\pi}{3}\right)=1$　$\therefore x+\dfrac{5\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$，

其中 n 為整數

亦即 $x=-\dfrac{7\pi}{6}+2n\pi$，其中 n 為整數

② 當 y 的最小值發生時，$\sin\left(x+\dfrac{5\pi}{3}\right)=-1$

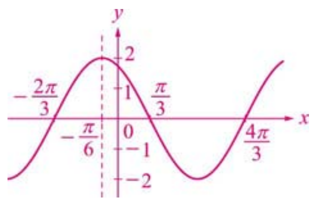
$\therefore x+\dfrac{5\pi}{3}=\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi$，其中 n 為整數

亦即 $x=-\dfrac{\pi}{6}+2n\pi$，其中 n 為整數

類題

關於函數 $f(x)=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$，其中 x 為任意實數，請選出正確的選項。

(A) $f(x)$ 有最大值 $\sqrt{3}+1$　(B) $f(x)$ 是一個週期函數，其週期為 2π



(C) $y=f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x=-\dfrac{\pi}{6}$

(D) $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸的交點中，離原點最近的為 $\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$

(E) $y=f(x)$ 的圖形對稱於原點

解　由疊合公式可知 $f(x)=-\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$，函數圖形如右所示

(A)×：由疊合公式可知 $-2\leq 2\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\leq 2$

(B)○：$f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 的週期為 2π

(C)○：$f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}\right)=2\sin\dfrac{\pi}{2}=2$　$\therefore x=-\dfrac{\pi}{6}$ 時，$f(x)$ 有最大值 2

故可知 $y=f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x=-\dfrac{\pi}{6}$

(D)×：由圖形可知 $\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 非 $y=f(x)$ 與 x 軸的交點

(E)×：若 $y=f(x)$ 的圖形對稱於原點

則當 $y=f(x)$ 通過點 $(a，b)$ 時，$y=f(x)$ 亦會通過 $(-a，-b)$

而 $y=2\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 通過 $(a，b)$ 時，$b=2\sin\left(a+\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

但 $2\sin\left(-a+\dfrac{2\pi}{3}\right)\neq -b$　　故選(B)(C)

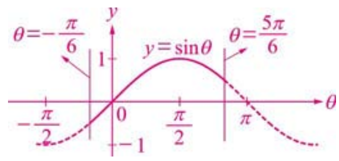
例題4　極值問題（二）

試求 $f(x)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)-2\cos x$ 在 $0\le x\le\pi$ 範圍內的最大值和最小值，並求最大值和最小值發生時 x 的值。

解　$f(x)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)-2\cos x=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\cos x+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin x\right)-2\cos x$

$$=2\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)-2\cos x=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x-\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$



而 $0\le x\le\pi$　$\therefore -\dfrac{\pi}{6}\le\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\le\dfrac{5\pi}{6}$

令 $\theta=x-\dfrac{\pi}{6}$，畫出 $y=\sin\theta$ 的圖形如右：

故(1)　當 $x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，亦即 $x=\dfrac{2\pi}{3}$時，$f(x)$ 有最大值 2

(2)　當 $x-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}$，亦即 $x=0$ 時，$f(x)$ 有最小值 -1

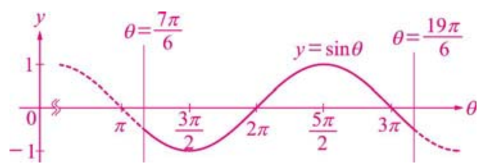
類題

試求 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)-2\cos x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 範圍內的最大值和最小值，並求最大值和最小值發生時 x 的值。

解　$f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)-2\cos x=2\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\cos x-\cos\dfrac{\pi}{6}\sin x\right)-2\cos x$

$$=2\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)-2\cos x=-\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}\sin x+\sin\frac{7\pi}{6}\cos x\right)=2\sin\left(x+\frac{7\pi}{6}\right)$$



而 $0\le x\le 2\pi$　$\therefore \dfrac{7\pi}{6}\le x+\dfrac{7\pi}{6}\le\dfrac{19\pi}{6}$

令 $\theta=x+\dfrac{7\pi}{6}$，畫出 $y=\sin\theta$ 的圖形如右：

故(1)　當 $x+\dfrac{7\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$或其同界角時，$f(x)$ 有最大值 2

但$\dfrac{7\pi}{6}\le\left(x+\dfrac{7\pi}{6}\right)\le\dfrac{19\pi}{6}$　$\therefore x+\dfrac{7\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{2}\Rightarrow x=\dfrac{4\pi}{3}$

(2)　當 $x+\dfrac{7\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{2}$或其同界角時，$f(x)$ 有最小值 -2

$\therefore x+\dfrac{7\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}$

例題5　極值問題（三）

(1) 若 $0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}$ 且 $f(x)=\cos^2 x-4\sin x\cos x-3\sin^2 x$，試問：

① $f(x)$ 的最大值為何？並求最大值發生時 x 的值。

② $f(x)$ 的最小值為何？並求最小值發生時 x 的值。

(2) 設 $\dfrac{\pi}{6}\leq x\leq \dfrac{3\pi}{4}$，若 $f(x)=2\sin 2x+\sin x+\cos x+1$，令 $\sin x+\cos x=t$，則

① 試以 t 表示 $f(x)=$________。

② 試求 $f(x)$ 在此範圍內的最大值為 ________。

注意　利用半角與倍角公式將原式化為 $2x$ 的三角函數，並利用疊合公式化簡原式。

解　(1) 利用半角公式，可知 $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$，$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

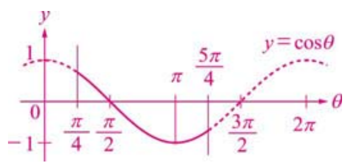
利用倍角公式，可知 $2\sin x\cos x=\sin 2x$

$\therefore f(x)=\cos^2 x-4\sin x\cos x-3\sin^2 x$

$$=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)-2\sin 2x-\left(\frac{3-3\cos 2x}{2}\right)=2\cos 2x-2\sin 2x-1$$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right)-1=2\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1$$

$\because 0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}$　$\therefore 0\leq 2x\leq \pi \Rightarrow \dfrac{\pi}{4}\leq 2x+\dfrac{\pi}{4}\leq \dfrac{5\pi}{4}$



令 $\theta=2x+\dfrac{\pi}{4}$，畫出 $y=\cos\theta$ 的圖形如右：

① 當 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$，即 $x=0$ 時，$f(x)$ 有最大值 $2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1=1$

② 當 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\pi$，即 $x=\dfrac{3\pi}{8}$ 時，$f(x)$ 有最小值 $2\sqrt{2}\times(-1)-1=-2\sqrt{2}-1$

(2) 令 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

又 $\dfrac{\pi}{6}\leq x\leq \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}\leq x+\dfrac{\pi}{4}\leq \dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \dfrac{5\pi}{12}\leq x+\dfrac{\pi}{4}\leq \pi$

$\therefore 0\leq \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leq 1$，故可知 $0\leq \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leq \sqrt{2}$，即 $0\leq t\leq \sqrt{2}$

① $t=\sin x+\cos x \Rightarrow t^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x$

$\Rightarrow \sin 2x=t^2-1$

$\therefore f(x)=2\times\sin 2x+\sin x+\cos x+1=2(t^2-1)+t+1=2t^2+t-1$

② $f(x)=2t^2+t-1=2\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}$，其中 $0\leq t\leq \sqrt{2}$

$\therefore$當 $t=\sqrt{2}$ 時，$f(x)$ 有最大值 $2\times(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}-1=3+\sqrt{2}$

類題

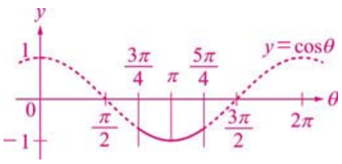
1. 若 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$ 且 $f(x)=3\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x$，試問：

(1) $f(x)$ 的最大值。　　(2) $f(x)$ 的最小值。

解　$f(x)=3\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x$

$$=3\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)-\sin 2x+\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)=\cos 2x-\sin 2x+2$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right)+2=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2$$



$\because\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$　$\therefore\frac{\pi}{2}\le 2x\le\pi\Rightarrow\frac{3\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$

令 $\theta=2x+\frac{\pi}{4}$，畫出 $y=\cos\theta$ 的圖形如右

(1) 當 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}$ 時，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 時，$f(x)$ 有最大值 1

(2) 當 $2x+\frac{\pi}{4}=\pi$ 時，即 $x=\frac{3\pi}{8}$ 時，$f(x)$ 有最小值 $2-\sqrt{2}$

2. 已知 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，$f(x)=2+2(\sin x-\cos x)-\sin 2x$

(1) 令 $t=\sin x-\cos x$，試求 t 的範圍。

(2) 若 $f(x)$ 的最大值為 M，最小值為 m，試求數對 (M,m)。

解　(1) $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

又 $0\le x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow-\frac{\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Rightarrow-\frac{\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}$

$\therefore-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，故可知 $-1\le t\le 1$

(2) $t=\sin x-\cos x\Rightarrow t^2=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=1-2\sin x\cos x=1-\sin 2x$

$\Rightarrow\sin 2x=1-t^2$

$\therefore f(x)=2+2(\sin x-\cos x)-\sin 2x=2+2t-(1-t^2)=t^2+2t+1=(t+1)^2$

由(1)知 $-1\le t\le 1$ 可得

當 $t=1$ 時，$f(x)$ 有最大值 4

當 $t=-1$ 時，$f(x)$ 有最小值 0

故數對 $(M,m)=(4,0)$

例題6　利用疊合解三角方程式

解方程式 $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$。

注意　將 $\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 寫成 $r\sin(x+\theta)$ 的型態。

解　$\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$

$\Rightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=\sqrt{2}\Rightarrow 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\Rightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

因 $x+\frac{\pi}{6}$ 為 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ 的同界角，可知 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+2n\pi$ 或 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}+2n\pi$，$n$ 為整數

故 $x=\frac{\pi}{12}+2n\pi$ 或 $x=\frac{7\pi}{12}+2n\pi$，其中 n 為整數

類題

若 $0\le x<2\pi$，解方程式 $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$。

解　$\sqrt{3}\sin x-\cos x=1\Rightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)=1\Rightarrow 2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1\Rightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

因 $x-\frac{\pi}{6}$ 為 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ 的同界角，可知 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2n\pi$ 或 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2n\pi$，$n$ 為整數

但 $0\le x<2\pi$　$\therefore -\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{6}$，故 $x=\frac{\pi}{3}$ 或 π

例題7　利用疊合解不等式

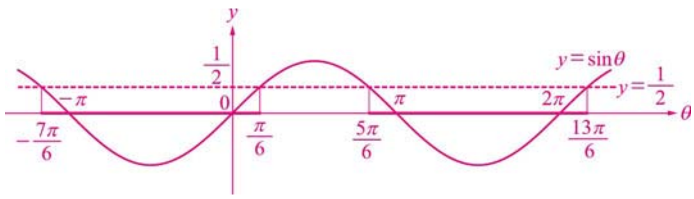
在 $0\le x<2\pi$ 的範圍內，求解不等式 $\sin x+\sqrt{3}\cos x\le 1$。

注意　將 $\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 寫成 $r\sin(x+\theta)$ 的型態。

解　由疊合可知，$\sin x+\sqrt{3}\cos x\le 1\Rightarrow 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1\Rightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le\frac{1}{2}$

先不要管 x 的範圍，令 $\theta=x+\frac{\pi}{3}$，則我們來解 $\sin\theta\le\frac{1}{2}$，由 $y=\sin\theta$ 的圖形，

如下圖所示：



可知 $\sin\theta\le\frac{1}{2}$ 的解為下列無限多個區間的聯集：

$\cdots\cdots,\ -\frac{7\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\le\theta\le\frac{13\pi}{6},\ \cdots\cdots$

亦即$\cdots\cdots$，$-\frac{7\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{13\pi}{6}$，$\cdots\cdots$

但原先題目的條件為 $0\le x<2\pi$，即 $\frac{\pi}{3}\le x+\frac{\pi}{3}<\frac{7\pi}{3}$

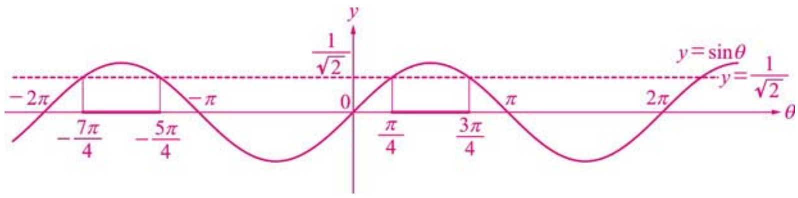
故本題的解為 $\frac{5\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{13\pi}{6}$，即 $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{11\pi}{6}$

類題

在 $0\le x\le\pi$ 的範圍內，求解不等式 $\sin x-\cos x\ge 1$。

解　由疊合可知，$\sin x-\cos x\ge 1\ \Rightarrow\ \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\ge 1\ \Rightarrow\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$

先不要管 x 的範圍，令 $\theta=x-\frac{\pi}{4}$，則我們來解 $\sin\theta\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$，由 $y=\sin\theta$ 的圖形，如下圖所示：



可知 $\sin\theta\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的解為下列無窮多個區間的聯集：

$\cdots\cdots,\ -\frac{7\pi}{4}\le\theta\le-\frac{5\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4},\ \cdots\cdots$

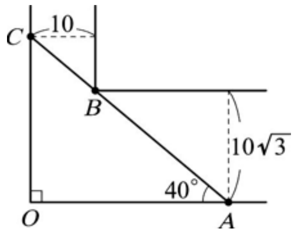
亦即$\cdots\cdots,\ -\frac{7\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{4}\le-\frac{5\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4},\ \cdots\cdots$

但原先題目的條件為 $0\le x\le\pi$，即 $-\frac{\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$

故本題的解為$\frac{\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$，即$\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$

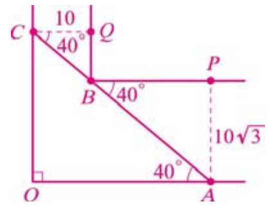
例題8　應用問題

如下圖，有一個 L 型直角渠道，其寬度分別為 $10\sqrt{3}$ 公尺及 10 公尺，今要在外側的兩邊上各取一點 A 與 C 圍成一個養殖場，使得 $\overline{AC}$ 通過頂點 B 且 $\angle OAC=40^\circ$，試求$\overline{AC}$。



注意　利用正餘弦函數的疊合。

解　如右圖，$\overline{AP}=10\sqrt{3}$，$\overline{CQ}=10$



$$\therefore\ \overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\frac{\overline{AP}}{\sin 40^\circ}+\frac{\overline{CQ}}{\cos 40^\circ}=\frac{10\sqrt{3}}{\sin 40^\circ}+\frac{10}{\cos 40^\circ}$$

$$=\frac{10\sqrt{3}\times\cos 40^\circ+10\times\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\frac{20\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ+\frac{1}{2}\sin 40^\circ\right)}{\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\frac{20\times\sin 100^\circ}{\frac{1}{2}\sin 80^\circ}=40(\text{公尺})$$

類題

試求 $\sec 80°-\sqrt{3}\csc 80°$ 的值。

解

$$\sec 80°-\sqrt{3}\csc 80°$$

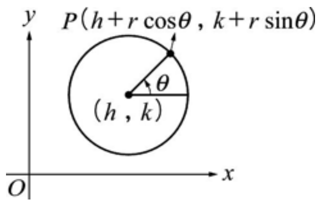
$$=\frac{1}{\cos 80°}-\frac{\sqrt{3}}{\sin 80°}=\frac{\sin 80°-\sqrt{3}\cos 80°}{\sin 80°\cos 80°}=\frac{2\left(\frac{1}{2}\sin 80°-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 80°\right)}{\frac{1}{2}(2\sin 80°\cos 80°)}$$

$$=\frac{2(\sin 80°\cos 60°-\cos 80°\sin 60°)}{\frac{1}{2}\sin 160°}=\frac{4\times\sin 20°}{\sin 160°}=4$$

主題二　圓、橢圓的參數式

1. 圓的參數式：

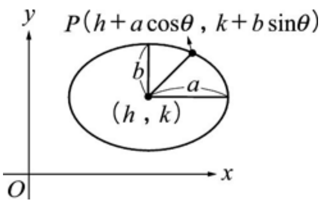
圓 C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 的參數式為 $\begin{cases}x=h+r\cos\theta\\ y=k+r\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$。



2. 橢圓的參數式：

(1) 中心在 $(h，k)$，其長軸與 x 軸平行或重合的橢圓

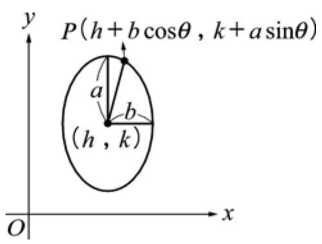
Γ：$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$，參數式為 $\begin{cases}x=h+a\cos\theta\\ y=k+b\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$。



(2) 中心在 $(h，k)$，其長軸與 y 軸平行或重合的橢圓

Γ：$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$，

參數式為 $\begin{cases}x=h+b\cos\theta\\ y=k+a\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$。

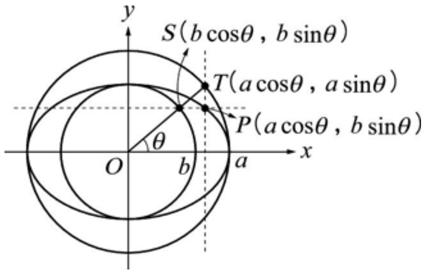


(3) 橢圓 Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的中心為原點 $O(0，0)$，

參數式為$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$，$0 \le \theta < 2\pi$。

中心 O 和 P（$a\cos\theta$，$b\sin\theta$）的連線$\overline{OP}$與 x 軸正向的夾角，並不等於 θ，

如下圖所示：



例題9　圓的參數式

將下列圓的方程式改寫成參數式，或將參數式改寫成方程式：

(1) 圓 C_1：$x^2+y^2+2x+4y-4=0$。

(2) 圓 C_2：$\begin{cases} x = -1+3\cos\theta \\ y = 2+3\sin\theta \end{cases}$，$0 \le \theta < 2\pi$。

解　(1) C_1：$x^2+y^2+2x+4y-4=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=9$

參數式為$\begin{cases} x+1 = 3\cos\theta \\ y+2 = 3\sin\theta \end{cases}$，$0 \le \theta < 2\pi$

即$\begin{cases} x = -1+3\cos\theta \\ y = -2+3\sin\theta \end{cases}$，$0 \le \theta < 2\pi$

(2) C_2：$\begin{cases} x = -1+3\cos\theta \\ y = 2+3\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 3\cos\theta \cdots\cdots ① \\ y-2 = 3\sin\theta \cdots\cdots ② \end{cases}$

$①^2+②^2$ 得 $(x+1)^2+(y-2)^2=9(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$ 亦即 $(x+1)^2+(y-2)^2=9$

類題

將下列圓的方程式改寫成參數式，或將參數式改寫成方程式：

(1) 圓 C_1：$x^2+y^2=2$。

(2) 圓 C_2：$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = -2+2\sin\theta \end{cases}$，$0 \le \theta < 2\pi$。

解　(1) C_1：$x^2+y^2=2$ 的參數式為$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\theta \\ y = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$，$0 \le \theta < 2\pi$

(2) C_2：$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = -2+2\sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2\cos\theta \cdots\cdots\cdots ① \\ y+2 = 2\sin\theta \cdots\cdots ② \end{cases}$

$①^2+②^2$ 得 $x^2+(y+2)^2=4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$　亦即 $x^2+(y+2)^2=4$

例題10　橢圓的參數式

試將下列各橢圓表示成參數式，或將參數式改寫成方程式：

(1) Γ_1：$\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{1}=1$。

(2) Γ_2：$\begin{cases} x = 2+3\cos\theta \\ y = -1+5\sin\theta \end{cases}$，$0 \le \theta < 2\pi$。

解　(1) 橢圓Γ_1：$\dfrac{(x+2)^2}{2^2}+\dfrac{(y-1)^2}{1^2}=1$的參數式為$\begin{cases}x+2=2\cos\theta\\y-1=\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$

即$\begin{cases}x=-2+2\cos\theta\\y=1+\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$

(2) 橢圓Γ_2 的參數式為$\begin{cases}x=2+3\cos\theta\\y=-1+5\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$

可改寫成$\begin{cases}\dfrac{x-2}{3}=\cos\theta\cdots\cdots①\\\dfrac{y+1}{5}=\sin\theta\cdots\cdots②\end{cases}$，$①^2+②^2$ 可得$\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{25}=1$

類題

試將下列各橢圓表示成參數式，或將參數式改寫成方程式：

(1) Γ_1：$\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$。　　(2) Γ_2：$\begin{cases}x=-2+2\cos\theta\\y=-3+3\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$。

解　(1) 橢圓Γ_1：$\dfrac{(x+2)^2}{3^2}+\dfrac{(y+2)^2}{4^2}=1$的參數式為$\begin{cases}x+2=3\cos\theta\\y+2=4\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$

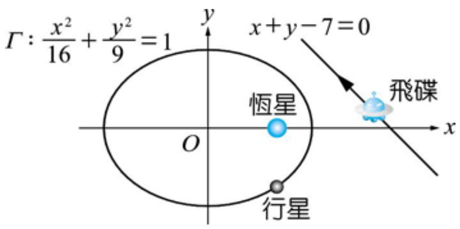
即$\begin{cases}x=-2+3\cos\theta\\y=-2+4\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$

(2) 橢圓Γ_2 的參數式為$\begin{cases}x=-2+2\cos\theta\\y=-3+3\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$

可改寫成$\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}=\cos\theta\cdots\cdots①\\\dfrac{y+3}{3}=\sin\theta\cdots\cdots②\end{cases}$，$①^2+②^2$ 可得$\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$

例題11　直線與橢圓的距離

一行星繞一恆星運轉，另有一飛碟靠近，已知三者處在同一平面上，且相對關係如下圖所示。試求飛碟行進路線和行星軌道的最短距離。



注意　將橢圓上的點表示成參數式的型態，並代入點到直線的距離公式。

解　如題圖，設橢圓 Γ：$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$上的 P 點為 $(4\cos\theta，3\sin\theta)$

L：$x+y-7=0$ 為飛碟的行進路線

則$d(P,L)=\dfrac{|4\cos\theta+3\sin\theta-7|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|4\cos\theta+3\sin\theta-7|}{\sqrt{2}}$

由正、餘弦函數的疊合可知

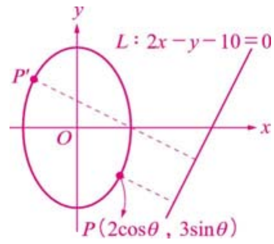
$4\cos\theta+3\sin\theta=5\left(\frac{4}{5}\cos\theta+\frac{3}{5}\sin\theta\right)=5\sin(\theta+\phi)$，其中$\phi$滿足 $\sin\phi=\frac{4}{5}$，$\cos\phi=\frac{3}{5}$

$\therefore -5\le 4\cos\theta+3\sin\theta\le 5$

可知 $4\cos\theta+3\sin\theta=5$ 時，$d(P,L)$ 有最小值$\frac{|5-7|}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

類題

設點 $P(x,y)$ 在橢圓 Γ：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$上，試求點 P 到直線 L：$2x-y-10=0$ 的最小距離與最大距離。



解 如下圖，設橢圓Γ：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$上的 P 點為$(2\cos\theta, 3\sin\theta)$

則$d(P,L)=\frac{|4\cos\theta-3\sin\theta-10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|4\cos\theta-3\sin\theta-10|}{\sqrt{5}}$

由正、餘弦函數的疊合可知

$4\cos\theta-3\sin\theta=5\left(\frac{4}{5}\cos\theta-\frac{3}{5}\sin\theta\right)=5\cos(\theta+\phi)$，其中$\phi$滿足 $\cos\phi=\frac{4}{5}$，$\sin\phi=\frac{3}{5}$

$\therefore -5\le 4\cos\theta-3\sin\theta\le 5$

可知 $4\cos\theta-3\sin\theta=5$ 時，$d(P,L)$ 有最小值$\frac{|5-10|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

而 $4\cos\theta-3\sin\theta=-5$ 時，$d(P,L)$ 有最大值$\frac{|-5-10|}{\sqrt{5}}=\frac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$

重要性：★★★★★

2-2 段考實力演練

一、基礎題

1. 將下列各函數疊合成 $y=r\sin(x+\theta)$ 的形式，其中 $r>0$ 且 $0\le\theta<2\pi$

(1) $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$。 (2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$。

(3) $y=8\sin x-6\cos x$。

解 (1) 利用和角公式得

$$\sqrt{3}\sin x-\cos x=r\sin(x+\theta)=r(\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta)$$
$$=(r\cos\theta)\sin x+(r\sin\theta)\cos x$$

比較等式兩邊有$\begin{cases} r\cos\theta=\sqrt{3}\cdots\cdots① \\ r\sin\theta=-1\cdots\cdots② \end{cases}$

$①^2+②^2$ 可得 $r^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=(\sqrt{3})^2+(-1)^2=4$

故 $r=2$

代回①與②得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ $\therefore\theta$ 為第四象限角 $\frac{11\pi}{6}$

因此 $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x+\frac{11\pi}{6}\right)$

(2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}+\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\sqrt{2}\sin x$

(3) $y=8\sin x-6\cos x=\sqrt{8^2+(-6)^2}\left(\frac{8}{10}\sin x-\frac{6}{10}\cos x\right)=10\left(\frac{4}{5}\sin x-\frac{3}{5}\cos x\right)$

$\therefore r=10$

又 $\cos\theta=\frac{4}{5}$，$\sin\theta=-\frac{3}{5}$

得知 θ 為第四象限角

故 $y=8\sin x-6\cos x=10\sin(x+\theta)$

其中 θ 滿足 $\cos\theta=\frac{4}{5}$，$\sin\theta=-\frac{3}{5}$

2. 試求 $y=2-3\cos x-4\sin x$ 的最大值與最小值。

解 $y=2-3\cos x-4\sin x=2-(4\sin x+3\cos x)=2-5\left(\frac{4}{5}\sin x+\frac{3}{5}\cos x\right)$

$=2-5\sin(x+\theta)$，

其中 θ 滿足 $\cos\theta=\frac{4}{5}$，$\sin\theta=\frac{3}{5}$

而 $-1\leqq\sin(x+\theta)\leqq 1$

$\Rightarrow$ $-5\leqq-5\sin(x+\theta)\leqq 5$

$\Rightarrow$ $-3\leqq 2-5\sin(x+\theta)\leqq 7$

故 $y=2-3\cos x-4\sin x$ 的最大值為 7，最小值為 -3

3. 試比較 $\sin 14°+\cos 14°$ 與 $\sqrt{2}\sin 58°$ 的大小關係。

解 $\sin 14°+\cos 14°=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 14°+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 14°\right)=\sqrt{2}(\cos 45°\sin 14°+\sin 45°\cos 14°)$

$=\sqrt{2}\sin 59°$

又 $\sin 59°>\sin 58°$，

可知 $\sqrt{2}\sin 59°>\sqrt{2}\sin 58°$

即 $\sin 14°+\cos 14°>\sqrt{2}\sin 58°$

4. 試求 $y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)-2\cos x$ 的最大值與最小值。

解　由差角公式

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos x-\cos\frac{\pi}{6}\sin x=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

$$\therefore y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-2\cos x=2\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)-2\cos x$$

$$=-\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$2\left(\cos\frac{7\pi}{6}\sin x+\sin\frac{7\pi}{6}\cos x\right)=2\sin\left(x+\frac{7\pi}{6}\right)$$

又 $-1\leqq\sin\left(x+\dfrac{7\pi}{6}\right)\leqq 1$

$\therefore -2\leqq 2\sin\left(x+\dfrac{7\pi}{6}\right)\leqq 2$

故 y 的最大值為 2，最小值為 -2

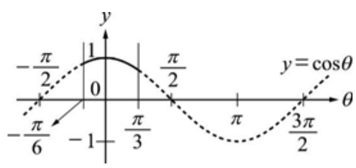
5. 若 $-\dfrac{\pi}{3}\leq x\leq\dfrac{\pi}{6}$ 且 $f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x+2$，試求 $f(x)$ 的最大值與最小值。

解　$f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x+2=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x\right)+2$

利用和角公式：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

可得 $f(x)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\cos x-\sin\dfrac{\pi}{6}\sin x\right)+2=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+2$

又 $-\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{6}$



$\therefore -\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\leqq x+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow -\dfrac{\pi}{6}\leqq x+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{\pi}{3}$

令 $\theta=x+\dfrac{\pi}{6}$，由 $y=\cos\theta$ 的圖形可知

$\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq 1\Rightarrow\dfrac{1}{2}\leqq\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq 1$

$\therefore f(x)$ 在 $-\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{6}$ 的區間內　有最大值 $2\times 1+2=4$　　有最小值 $2\times\dfrac{1}{2}+2=3$

6. 設 Γ 的參數式為 $\begin{cases}x=-1+4\cos\theta\\ y=-1+3\sin\theta\end{cases}$，$0\leq\theta<2\pi$，試求 Γ 的方程式。

解　$\begin{cases} x=-1+4\cos\theta \\ y=-1+3\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{4}=\cos\theta\cdots\cdots① \\ \dfrac{y+1}{3}=\sin\theta\cdots\cdots② \end{cases}$

$①^2+②^2$ 可得 $\dfrac{(x+1)^2}{16}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$

$\therefore \Gamma$的方程式為 $\dfrac{(x+1)^2}{16}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$　圖形為一橢圓

7. 試問下列各選項中的值，何者最大？
(A) $\sin 1+\cos 1$　(B) $\sin 2+\cos 2$　(C) $\sin 3+\cos 3$　(D) $\sin 4+\cos 4$　(E) $\sin 5+\cos 5$

解　$\sin 1+\cos 1$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 1\right)=\sqrt{2}\ \sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$$

同理，$\sin 2+\cos 2=\sqrt{2}\ \sin\left(2+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin 3+\cos 3=\sqrt{2}\ \sin\left(3+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin 4+\cos 4=\sqrt{2}\ \sin\left(4+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin 5+\cos 5=\sqrt{2}\ \sin\left(5+\frac{\pi}{4}\right)$

又 1 弧度≈57.3°，

$\therefore \left(1+\frac{\pi}{4}\right)$弧度≈102.3° $\Rightarrow \sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)>0$

$\left(2+\frac{\pi}{4}\right)$弧度≈159.6° $\Rightarrow \sin\left(2+\frac{\pi}{4}\right)>0$

$\left(3+\frac{\pi}{4}\right)$弧度≈216.9° $\Rightarrow \sin\left(3+\frac{\pi}{4}\right)<0$

$\left(4+\frac{\pi}{4}\right)$弧度≈274.2° $\Rightarrow \sin\left(4+\frac{\pi}{4}\right)<0$

$\left(5+\frac{\pi}{4}\right)$弧度≈331.5° $\Rightarrow \sin\left(5+\frac{\pi}{4}\right)<0$

又 $\sin 102.3°>\sin 159.6°$

故選(A)

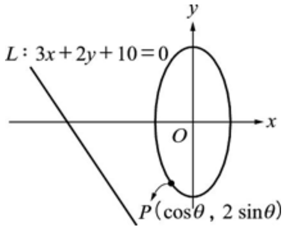
二、進階題

8. 設 P 為橢圓 $4x^2+y^2=4$ 上的動點，求 P 到直線 L：$3x+2y+10=0$ 距離的最小值為 ________。（提示：設 P 點坐標為 （$\cos\theta$，$2\sin\theta$），代入點到直線的距離公式）

解　橢圓的標準式為 $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{4}=1$

$\therefore$橢圓的參數式為$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$，其中 $0\leqq\theta<2\pi$

如下圖所示：



設 P 點坐標為 $(\cos\theta，2\sin\theta)$代入點到直線的距離公式

$\therefore d(P，L)=\dfrac{|3\times\cos\theta+2\times2\sin\theta+10|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{|3\cos\theta+4\sin\theta+10|}{\sqrt{13}}$

又 $3\cos\theta+4\sin\theta=5\left(\dfrac{3}{5}\cos\theta+\dfrac{4}{5}\sin\theta\right)=5\sin(\theta+\phi)$

其中ϕ滿足 $\sin\phi=\dfrac{3}{5}$，$\cos\phi=\dfrac{4}{5}$

故$-5\leqq3\cos\theta+4\sin\theta\leqq5$

$\therefore d(P，L)$ 的最小值為$\dfrac{|-5+10|}{\sqrt{13}}=\dfrac{5}{\sqrt{13}}=\dfrac{5\sqrt{13}}{13}$

9. 試求$\dfrac{1}{\sin10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos10^\circ}$的值。（提示：利用倍角公式與正、餘弦函數的疊合）

解

$$\frac{1}{\sin10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos10^\circ}=\frac{\cos10^\circ-\sqrt{3}\sin10^\circ}{\sin10^\circ\cos10^\circ}=\frac{2\left(\frac{1}{2}\cos10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin10^\circ\right)}{\sin10^\circ\cos10^\circ}$$

$$=\frac{2(\cos60^\circ\cos10^\circ-\sin60^\circ\sin10^\circ)}{\sin10^\circ\cos10^\circ}=\frac{2\cos70^\circ}{\sin10^\circ\cos10^\circ}$$

$$=\frac{2\times2\cos70^\circ}{2\sin10^\circ\cos10^\circ}=\frac{4\cos70^\circ}{\sin20^\circ}=4$$

10. 在 $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$的範圍內，求解不等式$\sqrt{3}\sin x-\cos x\leq1$。

（提示：將$\sqrt{3}\sin x-\cos x$ 寫成 $r\sin(x-\theta)$ 的型態）

解　由疊合可知

$\sqrt{3}\sin x-\cos x\leqq1$

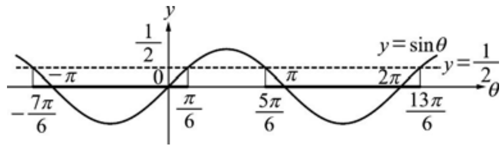
$\Rightarrow 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x\right)\leqq1$

$\Rightarrow 2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq1$

$\Rightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) \leqq \dfrac{1}{2}$，先不要管 x 的範圍

令 $\theta = x-\dfrac{\pi}{6}$，則我們來解 $\sin\theta \leqq \dfrac{1}{2}$

由 $y=\sin\theta$ 的圖形，如下圖所示：



可知 $\sin\theta \leqq \dfrac{1}{2}$ 的解為下列無窮多個區間的聯集：

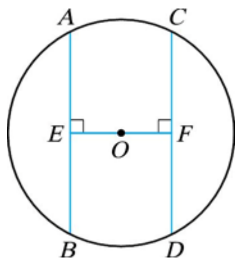
$\cdots\cdots$，$-\dfrac{7\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{13\pi}{6}$，$\cdots\cdots$

亦即$\cdots$，$-\dfrac{7\pi}{6} \leqq x-\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5\pi}{6} \leqq x-\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{13\pi}{6}$，$\cdots$

但原先題目的條件為 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$

故本題的解為 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$

11. 如右圖所示，想在一個半徑 50 公尺的圓形池塘上建造一座 H 字型的步道通過圓心 O，其中兩平行線段一樣長，且轉角處皆垂直，試求：
(1) 步道總長的最大值。
(2) 步道總長最大時，$\overline{EF}$ 的長度。（提示：設 $\angle AOE = \theta$）



解　(1) 可設 $\angle AOE = \angle BOE = \angle COF = \angle DOF = \theta$

步道總長為

$\overline{AB} + \overline{EF} + \overline{CD}$

又 $\overline{AB} = \overline{CD} = 50 \cdot \sin\theta \cdot 2 = 100\sin\theta$

$\overline{EF} = 50 \cdot \cos\theta \cdot 2$

$= 100\cos\theta$

$\therefore \overline{AB} + \overline{EF} + \overline{CD}$

$= 100\sin\theta + 100\cos\theta + 100\sin\theta$

$= 200\sin\theta + 100\cos\theta$

$= 100\sqrt{5}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cos\theta\right)$

$= 100\sqrt{5}\ \sin(\theta+\phi)$，

其中 $\cos\ \phi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 且 $\sin\ \phi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

可得 $\overline{AB}+\overline{EF}+\overline{CD}=100\sqrt{5}\ \sin(\theta+\phi)$

∴當 $\sin(\theta+\phi)=1$ 時，

$\overline{AB}+\overline{EF}+\overline{CD}$ 有最大值 $100\sqrt{5}$（公尺）

(2) 此時 $\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$$\therefore\ \overline{EF}=100\cdot\cos\theta=100\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=20\sqrt{5}\text{（公尺）}$$

三、歷屆試題

12. 下列哪一個數值最接近 $\sqrt{2}$ ？

(A) $\sqrt{3}\cos 44°+\sin 44°$　(B) $\sqrt{3}\cos 54°+\sin 54°$　(C) $\sqrt{3}\cos 64°+\sin 64°$

(D) $\sqrt{3}\cos 74°+\sin 74°$　(E) $\sqrt{3}\cos 84°+\sin 84°$　95.學測

（提示：(1) 正、餘弦函數的疊合；(2) $\sqrt{2}=2\cos 45°$）

13. 下列哪些函數的最小正週期為 π？

(A) $\sin x+\cos x$　(B) $\sin x-\cos x$　(C) $|\sin x+\cos x|$

(D) $|\sin x-\cos x|$　(E) $|\sin x|+|\cos x|$　92.學測

（提示：(1) 正、餘弦函數的疊合

(2) 分別繪出 $y=|\sin x|$ 與 $y=|\cos x|$ 的圖形，

再繪出 $y=|\sin x|+|\cos x|$ 的圖形）

14. 若 $f(x)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)-2\cos x-3$ 的最大值是 M，則 $M=$______。　82.社會組

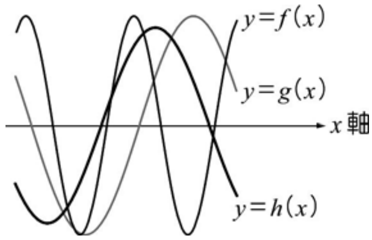
（提示：利用 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$）

15. 設 $270°<A<360°$ 且 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin 2004°$，若 $A=m°$，試求 m 的值。　93.學測

（提示：(1) 正、餘弦函數的疊合；(2) $\sin(180°+\theta)=-\sin\theta=\sin(360°-\theta)$）

16. 將函數 $y=3\sin x-\cos x$、$y=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$y=2\sin x+2\cos x$ 的圖形繪於同一坐標平面上，其與 x 軸的相關位置如下圖：

試問圖中的圖形 $y=f(x)$、$y=g(x)$、$y=h(x)$ 所代表的函數應為下列哪一個選項？



(A) $f(x)=3\sin x-\cos x$、$g(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$h(x)=2\sin x+2\cos x$
(B) $f(x)=3\sin x-\cos x$、$h(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$g(x)=2\sin x+2\cos x$
(C) $g(x)=3\sin x-\cos x$、$f(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$h(x)=2\sin x+2\cos x$
(D) $g(x)=3\sin x-\cos x$、$h(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$f(x)=2\sin x+2\cos x$
(E) $h(x)=3\sin x-\cos x$、$f(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$g(x)=2\sin x+2\cos x$

99.指考甲

（提示：正、餘弦函數的疊合）

17. 關於函數 $f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$，其中 x 為任意實數，請選出正確的選項。

(A) $f(x)$ 有最大值 $\sqrt{3}+1$

(B) $f(x)$ 是一個週期函數，其最小正週期為 2π

(C) $y=f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x=-\dfrac{\pi}{6}$

(D) $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸的交點中，離原點最近的為 $\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$

(E) $y=f(x)$ 的圖形對稱於原點　　99.課綱數甲大考中心參考試題

（提示：正、餘弦函數的疊合）

18. 考慮函數 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$，其中 x 為任意實數。請選出正確的選項。

(A) $f(-x)=f(x)$ 對所有實數 x 均成立

(B) f 的最大值為 $\sqrt{2}$

(C) f 的最小值為 0

(D) $f\left(\dfrac{\pi}{10}\right)>f\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$

(E)函數 f 的（最小正）週期為 π　　102.指考甲

（提示：畫出 $y=|\sin x|$ 與 $y=|\cos x|$ 的圖形後利用正、餘弦函數的疊合求解）

簡　答

一、基礎題

1.(1) $y=2\sin\left(x+\dfrac{11\pi}{6}\right)$；(2) $y=\sqrt{2}\sin x$；(3) $y=10\sin(x+\theta)$，其中 θ 滿足 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$　2.最大值 7，最小值 -3　3. $\sin 14°+\cos 14°>\sqrt{2}\sin 58°$　4.最大值 2，最小值 -2　5.最大值 4，最小值 3　6. $\dfrac{(x+1)^2}{16}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$　7.(A)

二、進階題

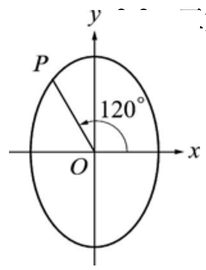
8. $\dfrac{5\sqrt{13}}{13}$　9.4　10. $0\le x\le\dfrac{\pi}{3}$　11.(1) $100\sqrt{5}$ 公尺；(2) $20\sqrt{5}$ 公尺

三、歷屆試題

12.(D)　13.(C)(D)　14. -1　15.306　16.(C)　17.(B)(C)　18.(A)(B)

能力提升特訓

範例1　橢圓參數式的應用（一）



已知橢圓 Γ 的方程式為 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$，

(1) 如下圖，點 P 在橢圓 Γ 上且 $\overline{OP}$ 與 x 軸正向的夾角為 120°，求 $\overline{OP}$ 長度為________。

(2) 橢圓 Γ 之內接正方形面積為________。

注意　(1) 設 $\overline{OP}=r$，θ 為 $\overline{OP}$ 與 x 軸正向夾角，則 P 點坐標為 $(r\cos\theta，r\sin\theta)$。

請注意此時 P 點的表示方式，並非橢圓的參數式，而是利用長度與標準位置角來表示點坐標。

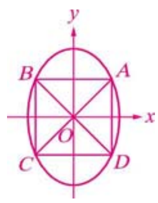
(2) 橢圓參數式為 $(2\cos\theta，3\sin\theta)$，但是 $(2\cos 120°，3\sin 120°)$ 並非 P 點坐標。

解　(1) 設 $\overline{OP}=r$，則 P 點坐標為 $(r\cos 120°，r\sin 120°)=\left(-\dfrac{1}{2}r,\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\right)$

而 P 點在橢圓 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上，將 $\left(-\dfrac{1}{2}r,\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\right)$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

得 $\dfrac{1}{16}r^2+\dfrac{1}{12}r^2=1\Rightarrow\dfrac{7}{48}r^2=1\Rightarrow r=\sqrt{\dfrac{48}{7}}$　故 $\overline{OP}=r=\sqrt{\dfrac{48}{7}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{4\sqrt{21}}{7}$

(2) 設 $ABCD$ 為橢圓 Γ 的內接正方形



設 $\overline{OA}=r$，則 A 點坐標為 $(r\cos 45°，r\sin 45°)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}r,\dfrac{\sqrt{2}}{2}r\right)$

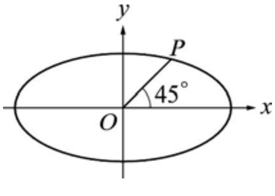
而 A 點在橢圓 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上，將 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}r,\dfrac{\sqrt{2}}{2}r\right)$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

得 $\dfrac{1}{8}r^2+\dfrac{1}{18}r^2=1\ \Rightarrow\dfrac{13}{72}r^2=1\Rightarrow\ r^2=\dfrac{72}{13}$

故內接正方形的面積 $=4\triangle AOB$ 面積 $=4\times\left(\dfrac{1}{2}\times r\times r\right)=2r^2=2\times\dfrac{72}{13}=\dfrac{144}{13}$

類題

1. 在坐標平面上有一橢圓，它的長軸落在 x 軸上，短軸落在 y 軸上，長軸、短軸的長度分別為 4、2。如圖所示，通過橢圓的中心 O 且與 x 軸夾角為 45 度的直線在第一象限跟橢圓相交於 P。則此交點 P 與中心 O 的距離為何？



(A) 1.5　(B) $\sqrt{1.6}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) $\sqrt{2.5}$　(E) $\sqrt{3.2}$　　91.學測

解　設$\overline{OP}=r$，則 P 點坐標為（$r\cos 45°$，$r\sin 45°$）＝$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r,\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)$

而 P 點在橢圓$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$上，將$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r,\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)$代入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

得$\frac{1}{8}r^2+\frac{1}{2}r^2=1 \Rightarrow \frac{5}{8}r^2=1 \Rightarrow r=\sqrt{\frac{8}{5}}$　故$\overline{OP}=r=\sqrt{\frac{8}{5}}=1.6$　故選(B)

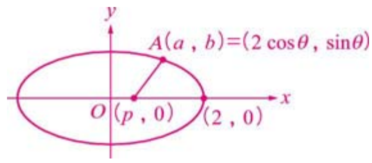
2. 設（p，0）為橢圓$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$的長軸上一定點，且 $0<p<\frac{3}{2}$。若點（a，b）為橢圓上距離（p，0）最近的點，試求 a。（以 p 的函數表示）　89.自然組

解　A（a，b）為橢圓$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$上的點

可令 $a=2\cos\theta$，$b=\sin\theta$

$$\overline{AP}=\sqrt{(2\cos\theta-p)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{4\cos^2\theta-4p\cos\theta+p^2+\sin^2\theta}$$

$$=\sqrt{3\cos^2\theta-4p\cos\theta+p^2+1}=\sqrt{3\left(\cos\theta-\frac{2p}{3}\right)^2+1-\frac{p^2}{3}}$$



∴當 $\cos\theta=\frac{2p}{3}$時，$\overline{AP}$有最小值

即 $a=2\cos\theta=\frac{4p}{3}$時，$\overline{AP}$有最小值

範例2　橢圓參數式的應用（三）

橢圓 Γ：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，試求：

(1) 橢圓Γ內接正方形的面積與周長。

(2) 橢圓Γ內接矩形面積的最大值與內接矩形周長的最大值。

注意　(1) 可假設內接正方形其中一個頂點為（t，t）。

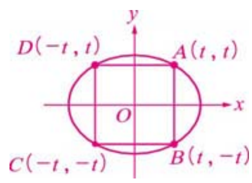
(2) 可假設內接矩形其中一個頂點為（$4\cos\theta$，$3\sin\theta$）。

解　(1) 設 A（t，t）為橢圓$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$內接正方形的一個頂點

則其它三個頂點為 B（t，$-t$），C（$-t$，$-t$），D（$-t$，t），如下圖所示

A（t，t）在$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$上，可知$\frac{t^2}{16}+\frac{t^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{25t^2}{144}=1 \Rightarrow t=\pm\frac{12}{5}$

A（t，t）在第一象限，取 $t=\frac{12}{5}$



① 內接正方形 $ABCD$ 的面積為 $2t\times 2t=4t^2=4\times\frac{144}{25}=\frac{576}{25}$

② $ABCD$ 的周長為 $4\times 2t=8t=8\times\frac{12}{5}=\frac{96}{5}$

(2) 橢圓$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$的參數式為$\begin{cases} x=4\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$，其中 $0\le\theta<2\pi$

設 P（α，β）為其內接矩形的一個頂點，則其它三個頂點為

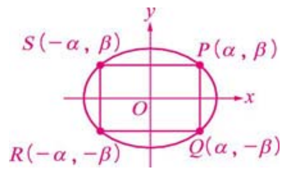
Q（α，$-\beta$），R（$-\alpha$，$-\beta$），S（$-\alpha$，β），如下圖所示

令 $\alpha=4\cos\theta$，$\beta=3\sin\theta$

① 矩形 $PQRS$ 的面積為

$\overline{PQ}\times\overline{PS}=2\beta\times2\alpha=4\alpha\beta=4\times4\cos\theta\times3\sin\theta=48\sin\theta\cos\theta=24\sin2\theta$

當 $\sin2\theta=1\left(\text{即}\theta=\dfrac{\pi}{4}\text{時}\right)$，內接矩形的最大值為24

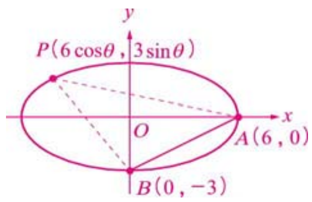


② 矩形 $PQRS$ 的周長為 $2(\overline{PQ}+\overline{PS})=4(4\cos\theta+3\sin\theta)$

$\because 4\cos\theta+3\sin\theta\le\sqrt{4^2+3^2}$　$\therefore$周長的最大值為 $4\times\sqrt{3^2+4^2}=20$

類題

設 A（6，0），B（0，−3），若一動點 P 在橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$上移動，試求$\triangle PAB$ 面積的最大值以及此時的 P 點坐標。



解　可假設 P 點坐標為（$6\cos\theta$，$3\sin\theta$），其中 $0\le\theta<2\pi$

$\overline{AB}=(0,-3)-(6,0)=(-6,-3)$，

$\overline{AP}=(6\cos\theta,3\sin\theta)-(6,0)=(6\cos\theta-6,3\sin\theta)$

$\triangle PAB$ 的面積即為$\overline{AB}$與$\overline{AP}$所圍成的三角形面積

$$\therefore\triangle PAB=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-6 & -3\\ 6\cos\theta-6 & 3\sin\theta\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|-18\sin\theta+18\cos\theta-18\right|$$
$$=\left|9\cos\theta-9\sin\theta-9\right|$$
$$=\left|9\sin\theta-9\cos\theta+9\right|=9\left|\sin\theta-\cos\theta+1\right|$$

$$\because\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$\therefore$當 $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ 時，$\triangle PAB$ 的面積有最大值 $9(\sqrt{2}+1)$

此時 $\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\theta=\dfrac{3\pi}{4}$，故 P 點坐標為$\left(6\cos\dfrac{3\pi}{4},3\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)=\left(-3\sqrt{2},\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$