第2章　三角函數

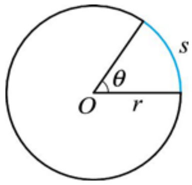
2-1　弧度、弧長

主題一　弧度

1. 若用 $\dfrac{\text{弧長}}{\text{半徑}}$ 來衡量角度的大小，這就是弧度的概念，這種以弧度為單位來測量角的大小的度量方式，稱為弧度制。
2. 弧度：

(1) 若一圓的半徑為 r，則弧長 s 所對應的圓心角 θ 為 $\theta=\dfrac{s}{r}$ 弧度。

(2) 弧度與度的關係：2π 弧度$=360°$ 或 π 弧度$=180°$



3. 度與弧度的換算：

(1) 1 弧度$=\dfrac{180°}{\pi}\approx 57.3°$

(2) $1°=\dfrac{\pi}{180}$ 弧度。

例題1　度與弧度的換算

(1) 將 $135°$ 化為弧度。　　(2) 將 $\dfrac{7\pi}{6}$ 弧度化為度。

注意　利用 π 弧度$=180°$ 進行換算。

解 (1) 由 $\dfrac{135°}{180°}=\dfrac{x}{\pi}$，得 $x=\dfrac{3\pi}{4}$，故 $135°=\dfrac{3\pi}{4}$

(2) 由 $\dfrac{\frac{7\pi}{6}}{\pi}=\dfrac{y}{180°}$，得 $y=210°$，故 $\dfrac{7\pi}{6}=210°$

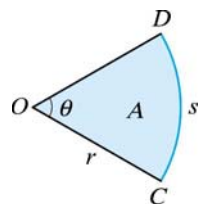
類題

(1) 將$-150°$ 化為弧度。　　(2) 將 2 弧度化為度。

解 (1) 由 $\dfrac{-150°}{180°}=\dfrac{x}{\pi}$，得 $x=-\dfrac{5\pi}{6}$，故$-150°=-\dfrac{5\pi}{6}$

(2) 由 $\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{y}{180°}$，得 $y=\dfrac{360°}{\pi}\approx 57.3°\times 2=114.6°$

主題二　弧長與扇形面積



1. 扇形的弧長與面積公式：

若圓半徑為 r，扇形 COD 的圓心角 $\angle COD=\theta$（弧度），$0\le\theta\le 2\pi$，如下圖所示，令扇形的弧長為 s，面積為 A，則：

(1) $s=r\theta$。

(2) $A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rs$。

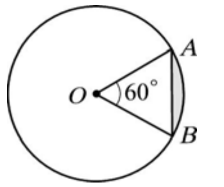
2. 特別注意，在使用這兩個公式時，θ 都要先化為弧度。

例題2　求扇形的弧長與面積

由一圓弧與一弦所圍成的區域稱為弓形。已知一圓的半徑為 4，其上一圓弧 $\overparen{AB}$ 所對的圓心角為 $60°$，試求：

(1) 扇形的弧長及面積。

(2) 弓形的周長及面積。



解　(1) 因 $60°=\frac{\pi}{3}$

故弧長為 $s=r\theta=4\times\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$

而扇形面積 $A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}$

(2) 因 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 且 $\angle AOB=60°$ $\Rightarrow$ $\triangle OAB$ 為正三角形 $\Rightarrow$ $\overline{AB}=4$

又弧長 $s=\frac{4\pi}{3}$

故弓形的周長$=4+\frac{4\pi}{3}$

$\triangle OAB$ 面積$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$

故弓形面積＝扇形面積－$\triangle OAB$ 面積$=\frac{8\pi}{3}-4\sqrt{3}$

類題

已知一扇形的半徑為 6 公分，圓心角為 $\frac{\pi}{3}$ 弧度，試求此扇形的弧長與面積。

解　依題意可知，$r=6$，$\theta=\frac{\pi}{3}$，則

(1) 弧長 $s=r\theta=6\times\frac{\pi}{3}=2\pi$（公分）

(2) 面積 $A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\pi}{3}=6\pi$（平方公分）

例題3　弧長與扇形面積公式的應用（一）

一圓的半徑為 6，在圓上切出一塊扇形，已知扇形的周長為圓周長的一半，則此扇形的圓心角與面積各是多少？

注意　(1) 扇形周長＝兩半徑和＋弧長$=2r+r\theta$。

(2) 圓周長為 $2\pi r$。

解　設圓心角為 θ 弧度

依題意，扇形周長＝兩半徑和＋弧長＝$2r+r\theta=6(\theta+2)$

圓周長為 $2\pi r=12\pi \Rightarrow 6(\theta+2)=12\pi\times\frac{1}{2} \Rightarrow \theta+2=\pi \Rightarrow \theta=\pi-2$

由 $A=\frac{1}{2}r^2\theta \Rightarrow A=\frac{1}{2}\times 6^2\times(\pi-2)=18(\pi-2)$

故扇形圓心角為 $\pi-2$ 弧度，且面積為 $18(\pi-2)$ 平方單位

類題

一圓的半徑為 6，在圓上切出一塊扇形，已知扇形的周長為 24，則此扇形的圓心角與面積各是多少？

解　設圓心角為 θ 弧度

依題意，扇形周長＝兩半徑和＋弧長＝$2r+r\theta=12+6\theta$

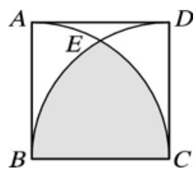
$\Rightarrow 12+6\theta=24 \Rightarrow \theta=2$

由 $A=\frac{1}{2}r^2\theta \Rightarrow A=\frac{1}{2}\times 6^2\times 2=36$

故扇形圓心角為 2 弧度，且面積為 36 平方單位

例題4　弧長與扇形面積公式的應用（二）

邊長為 1 的正方形 $ABCD$，以頂點 B，C 為圓心，邊長 1 為半徑作圓弧，如下圖所示，試求：



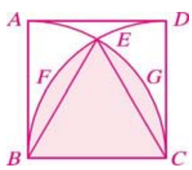
(1) 陰影部分的周長。

(2) 陰影部分的面積。

注意　連 $\overline{BE}$，$\overline{CE}$，則 $\triangle BCE$ 為正三角形。

解　連 $\overline{BE}$，$\overline{CE}$，得 $\overline{BE}=\overline{BC}=1$（以 B 為圓心，1 為半徑作圓弧）

$\overline{CE}=\overline{BC}=1$（以 C 為圓心，1 為半徑作圓弧）$\Rightarrow \triangle BCE$ 為正三角形



為便於區分，在 $\overset{\frown}{BE}$，$\overset{\frown}{CE}$ 上各任取一點 F 與 G

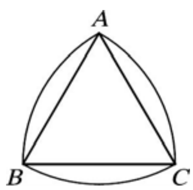
(1) 周長＝$\overset{\frown}{BFE}+\overset{\frown}{CGE}+\overline{BC}$

$=1\times\frac{\pi}{3}+1\times\frac{\pi}{3}+1=\frac{2\pi}{3}+1$

(2) 面積＝扇形 EBC＋扇形 $ECB-\triangle BCE$

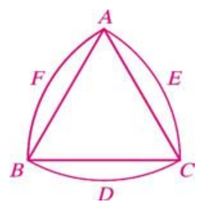
$=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

類題



正三角形 ABC 之邊長為 1，分別以 A、B、C 為圓心作圓弧 $\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$，試求三個弓形及正三角形 ABC 之面積總和。

解　為便於區分，在 $\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{AB}$ 上各取一點分別是 D、E、F，如下圖所示



面積＝扇形 $ABDC$＋扇形 $BCEA$＋扇形 $CAFB-2\triangle ABC$

$=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{3}-2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2\quad=\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

重要性：★★★☆☆

2-1　段考實力演練

一、基礎題

1. 有一扇形，其半徑為 3，弧長為 4，試求扇形的圓心角。

解　利用 $\theta=\dfrac{s}{r}$ 得 $\theta=\dfrac{4}{3}$（弧度）

2. 將下表中各個空格填入適當的值。

角度	30°		60°		120°		150°		210°		270°		315°	
弧度		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π

解

角度	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
弧度	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
角度	180°	210°	240°	270°	300°	315°	360°
弧度	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π

3. 已知一扇形的半徑為 2，圓心角為 45°，試求：
   (1) 扇形的弧長。
   (2) 扇形的面積。
   (3) 扇形的周長。

解　$45°=\dfrac{\pi}{4}$

(1)　扇形的弧長為 $s=r\theta=2\times\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

(2)　扇形的面積為 $A=\dfrac{1}{2}\ r^2\theta=\dfrac{1}{2}\times2^2\times\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

(3)　扇形的周長為 $2r+r\theta=4+\dfrac{\pi}{2}$

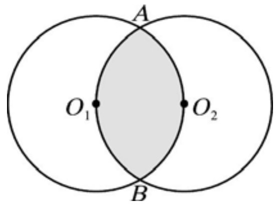
4. 有一扇形的弧長與面積相等，試求扇形所在圓的半徑。

解　設扇形所在圓的半徑為 r，圓心角為 θ

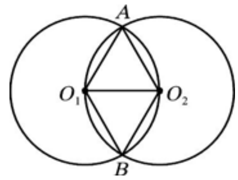
依題意，$r\theta=\dfrac{1}{2}\ r^2\theta \Rightarrow 1=\dfrac{1}{2}\ r \Rightarrow r=2$　故扇形所在圓的半徑為 2

二、進階題

5. 如右圖所示，有兩個單位圓（半徑 $r=1$），且每一圓皆通過另一圓之圓心，試求陰影部分面積。



解　連 $\overline{O_1A}$，$\overline{O_1B}$，$\overline{O_2A}$，$\overline{O_2B}$，$\overline{O_1O_2}$



陰影部分面積＝扇形 O_1AB＋扇形 $O_2AB-\triangle AO_1O_2-\triangle BO_1O_2$

$\triangle AO_1O_2$ 中，$\overline{O_1O_2}=\overline{O_1A}=\overline{O_2A}=1\Rightarrow\triangle AO_1O_2$ 為正三角形

同理，$\triangle BO_1O_2$ 為正三角形 $\Rightarrow\angle AO_1B=\angle AO_2B=\dfrac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow$ 扇形 O_1AB＝扇形 $O_2AB=\dfrac{1}{2}\times1^2\times\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$

$\triangle AO_1O_2=\triangle BO_1O_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

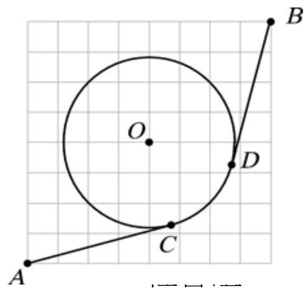
故陰影部分面積＝$\dfrac{\pi}{3}\times2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times2$

$=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

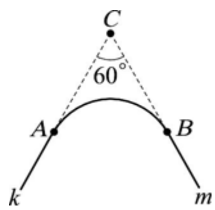
三、歷屆試題

6. 有一輪子，半徑 50 公分，讓它在地上滾動 200 公分長度，問輪子繞軸轉動多少度？（度以下四捨五入）　88.學測
（提示：滾動的長度就是弧長）

7. 如右圖所示，每個小方格的邊長為 1，圓 O 的圓心為 O，半徑為 $\dfrac{1}{2}$ $\overline{AO}$；$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 均為圓 O 的切線，切點分別為 C 點與 D 點。
(1) 試求 $\angle COD$。
(2) 求線段 $\overline{AC}$，圓弧 $\overset{\frown}{CD}$ 及線段 $\overline{DB}$ 的長度之和。
（提示：考慮$\triangle AOC$ 與$\triangle BOD$）



8. 兩條公路 k 及 m，如果筆直延伸將交會 C 處成 $60°$ 夾角，如圖所示。為銜接此兩公路，規劃在兩公路各距 C 處 450 公尺的 A、B 兩點間開拓成圓弧型公路，使 k、m 分別在 A、B 與此圓弧相切，則此圓弧長為多少公尺？（公尺以下四捨五入）
（$\sqrt{3}\approx1.732$，$\pi\approx3.14$）
（提示：先求出圓弧所在圓的半徑，再利用弧長公式求解）　90.學測



簡　答

一、基礎題

1.$\dfrac{4}{3}$ 弧度　2.略　3.(1) $\dfrac{\pi}{2}$；(2) $\dfrac{\pi}{2}$；(3) $4+\dfrac{\pi}{2}$　4.2

二、進階題

5.$\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

三、歷屆試題

6.229° 7.(1) $\dfrac{\pi}{3}$ 弧度；(2) $4\sqrt{6}+\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ 8.544 公尺

能力提升特訓

範例1 時針與分針的夾角

時鐘 9 點 30 分時，時針與分針之夾角為多少弧度？

注意 60 分鐘表示 360° ⇒ 鐘面每格為 6°

解 時針 60 分鐘走 5 格，5 格為 30° ⇒ 1 分鐘走 0.5°

分針 1 分鐘走 1 格，1 格為 6°

由右圖可知，夾角為 $15\times6°+30\times0.5°=105°$

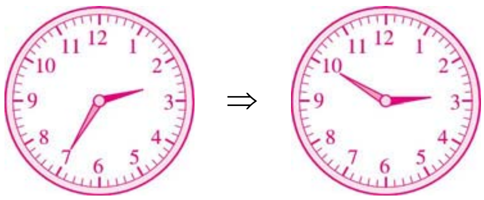
由 π 弧度＝180°，得 $\dfrac{x}{\pi}=\dfrac{105°}{180°}\Rightarrow x=\dfrac{7\pi}{12}$

故時針與分針之夾角為 $\dfrac{7\pi}{12}$ 弧度

類題

有一時鐘其時針長 2 公分，分針長 3 公分，則時間由 2 點 35 分到 2 點 50 分，時針與分針所走過的角度比為何？時針與分針所掃過的面積比為何？

解 如圖



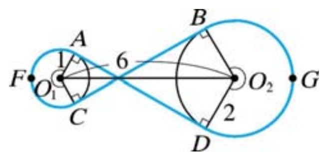
(1) 時針走過的角度為 $(50-35)\times0.5°\times\dfrac{\pi}{180°}=\dfrac{\pi}{24}$

分針走過的角度為 $(50-35)\times6°\times\dfrac{\pi}{180°}=\dfrac{\pi}{2}$

角度比＝$\dfrac{\pi}{24}:\dfrac{\pi}{2}=1:12$

(2) 面積比＝$\dfrac{1}{2}\times2^2\times\dfrac{\pi}{24}:\dfrac{1}{2}\times3^2\times\dfrac{\pi}{2}=1:27$

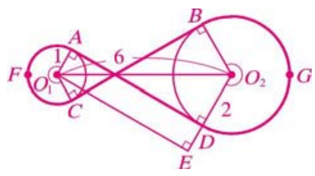
範例2 扇形弧長公式的應用



兩輪半徑分別為 1 與 2，兩輪中心的距離為 6，將一皮帶交叉緊繞此兩輪使轉動時兩輪之轉向相反，如下圖所示，試求皮帶的長度。

注意 皮帶長度為兩段弧長與兩線段之和，即 $\overset{\frown}{AFC}+\overset{\frown}{BGD}+\overline{AD}+\overline{BC}$。

解 如下圖所示，$\overline{AD}=\overline{O_1E}$，$\overline{O_2E}=\overline{O_2D}+\overline{DE}=\overline{O_2D}+\overline{O_1A}=2+1=3$



(1) $\triangle O_1O_2E$ 中，$\overline{O_1O_2}=6$，$\overline{O_2E}=3\Rightarrow\overline{O_1E}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$

同理可得，$\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{O_1E}=3\sqrt{3}$

(2) $\triangle O_1O_2E$ 中，$\angle O_1O_2E=60^\circ \Rightarrow \angle O_1O_2B=60^\circ$

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{BGD}$ 所對應之圓心角為 $360^\circ-2\times60^\circ=240^\circ$，即 $\dfrac{4\pi}{3}$

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{BGD}$ 的弧長為 $2\times\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{8\pi}{3}$

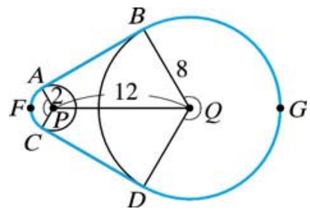
同理可得，$\overset{\frown}{AFC}$ 所對應之圓心角為 $360^\circ-2\times60^\circ=240^\circ$，即 $\dfrac{4\pi}{3}$

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AFC}$ 的弧長為 $1\times\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$

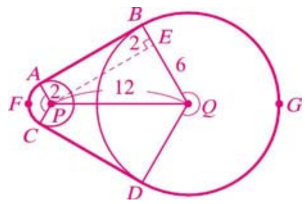
故皮帶的長度為 $2\times3\sqrt{3}+\dfrac{8\pi}{3}+\dfrac{4\pi}{3}=6\sqrt{3}+4\pi$

類題

一皮帶緊繞在以 P，Q 為圓心之圓輪上，兩輪的半徑分別為 2 與 8，$\overline{PQ}=12$，如右圖所示，試求皮帶的長度。



解　如右圖所示 $\overline{AB}=\overline{PE}$，$\overline{QE}=\overline{QB}-\overline{BE}=\overline{QB}-\overline{AP}=8-2=6$



(1) $\triangle PQE$ 中

$\overline{PE}=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{QE}^2}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$

同理可得，$\overline{CD}=\overline{AB}=6\sqrt{3}$

(2) $\triangle PQE$ 中，$\overline{PQ}=12$，$\overline{QE}=6$，$\overline{PE}=6\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ $\angle QPE=30^\circ$，$\angle PQE=60^\circ$

$\Rightarrow$ 扇形 APC 所對應之圓心角為 $360^\circ-2\times90^\circ-2\times30^\circ=120^\circ$，即 $\dfrac{2\pi}{3}$

扇形 BQD 所對應之圓心角為 $360^\circ-2\times60^\circ=240^\circ$，即 $\dfrac{4\pi}{3}$

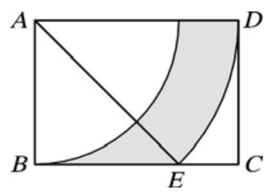
$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AFC}$ 的弧長為 $2\times\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$

$\overset{\frown}{BGD}$ 的弧長為 $8\times\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{32\pi}{3}$

故皮帶的長度為 $2\times6\sqrt{3}+\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{32\pi}{3}=12\sqrt{3}+12\pi$

範例3　扇形面積公式的應用

如右圖，矩形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=6\sqrt{2}$，以 A 為圓心，$\overline{AB}$，



$\overline{AD}$ 為半徑畫兩弧，試求：

(1) $\angle BAE$。

(2) 陰影部分之面積。

注意　(1)　先求出 $\angle BAE$，則陰影部分之面積很容易求得。

(2)　利用 $\triangle ABE$ 之邊長比例即可求得 $\angle BAE$。

解　(1)　$\triangle ABE$ 中，$\angle ABE=90°$，$\overline{AB}=6$，$\overline{AE}=\overline{AD}=6\sqrt{2}$

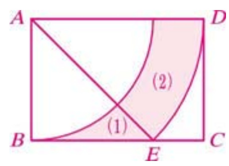
$$\Rightarrow\ \overline{BE}=\sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2-6^2}=\sqrt{36}=6$$

$$\Rightarrow\ \triangle ABE \text{ 為等腰直角三角形} \Rightarrow\ \angle BAE=45°\text{，即 } \frac{\pi}{4}$$

(2)　如右圖所示

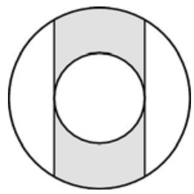
陰影部分面積為(1)＋(2)

$$=\left(\frac{1}{2}\times6\times6-\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\left(6\sqrt{2}\right)^2\times\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\pi}{4}\right)=18$$



類題

如右圖，半徑各為 1 與 2 的兩同心圓，試求大圓中分別與小圓相切的兩條平行弦所圍成之陰影部分面積。

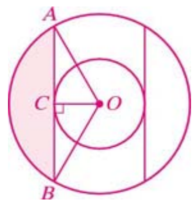


解　如圖（一）所示

$\triangle OAC$ 中，$\overline{OA}=2$，$\overline{OC}=1$，$\overline{OC}\perp\overline{AB}\Rightarrow\ \overline{AC}=\sqrt{3}$

$\Rightarrow\ \angle AOC=60°$，即 $\frac{\pi}{3}$

同理，$\triangle OBC$ 中，可得 $\angle BOC=60°$，即 $\frac{\pi}{3}\Rightarrow\ \angle AOB=120°$，即 $\frac{2\pi}{3}$



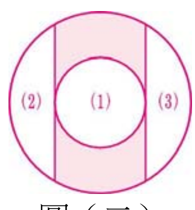
圖（一）

由扇形面積公式 $\Rightarrow$ 陰影部分面積為 $\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin120°=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$

如圖（二）所示，陰影部分面積為

大圓面積－(1)－(2)－(3)

$$=4\pi-\pi-\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)-\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}+2\sqrt{3}$$



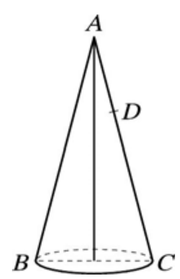
圖（二）

範例4　直圓錐的展開

有一直圓錐如下圖所示，$\overline{AB}=12$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AD}=4$，若 C 處有一隻螞蟻，試求：

(1) 沿表面爬行繞直圓錐一圈又回到 C 的最短路線長。

(2) 沿表面爬行繞直圓錐一圈到 D 的最短路線長。

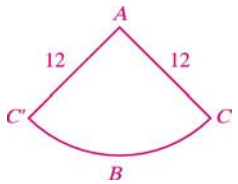


注意　將直圓錐剪開攤平成為扇形，最短路徑為兩點間的直線距離。

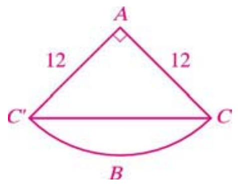
解　沿 $\overline{AC}$ 之側稜剪開攤平成為扇形，如圖（一）所示

$\Rightarrow$ 弧長 $\overset{\frown}{CBC'}$ 為原直圓錐底圓的周長　長為 6π

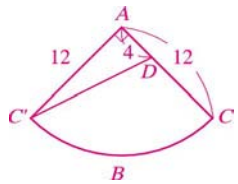
由 $\theta=\dfrac{s}{r}$ 得 $\theta=\dfrac{6\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}$



圖（一）



圖（二）



圖（三）

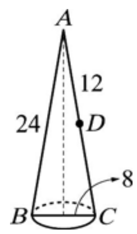
(1)　繞一圈又回到 C 的最短路線，如圖（二）所示

最短路線長為 $\overline{CC'}=\sqrt{12^2+12^2}=12\sqrt{2}$

(2)　繞一圈到 D 的最短路線，如圖（三）所示

最短路線長為 $\overline{C'D}=\sqrt{12^2+4^2}=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$

類題

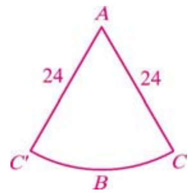


有一直圓錐如右圖所示，底圓直徑 $\overline{BC}=8$，$\overline{AB}=24$，$\overline{AD}=12$，試求：

(1) 若 C 處有一螞蟻沿表面爬行繞錐面一圈到 D，求最短路線長。

(2) 直圓錐的表面積。（含底圓及側表面積）

解　(1) 沿 $\overline{AC}$ 之側稜剪開攤平成為扇形，如圖（一）所示

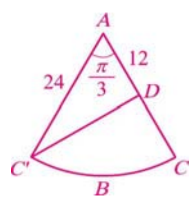


圖（一）

$\Rightarrow$ 弧長 $\overset{\frown}{CBC'}$ 為原直圓錐底圓的周長 $\Rightarrow$ 弧長$=8\pi$

$\theta=\dfrac{s}{r}$，得 $\theta=\dfrac{8\pi}{24}=\dfrac{\pi}{3}$

由 C 沿表面爬行繞錐面一圈到 D 的最短路線，如圖（二）所示



圖（二）

在$\triangle AC'D$ 中，$\overline{AC'}=24$，$\overline{AD}=12$，$\angle C'AD=\dfrac{\pi}{3}$

利用餘弦定理得 $\overline{C'D}^2=24^2+12^2-2\times24\times12\times\cos\dfrac{\pi}{3}=432$

$\Rightarrow$ $\overline{C'D}=12\sqrt{3}$，故最短路線長為 $12\sqrt{3}$

(2)　直圓錐的表面積＝直圓錐的側表面積＋底圓面積

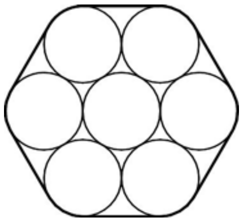
＝扇形 ACC' 的面積＋底圓面積$=\dfrac{1}{2}\times24^2\times\dfrac{\pi}{3}+\pi\times4^2=96\pi+16\pi=112\pi$

歷屆試題

包裝七根半徑皆為 1 的圓柱，其截面如下圖所示，試求：

(1) 外圍粗黑線條的長度。

(2) 圍成之面積。 90.社會組



提示 利用弧長公式。

解 (1) 將外邊六個圓之圓心與外圍粗線段的切點連起來，如圖（一）所示

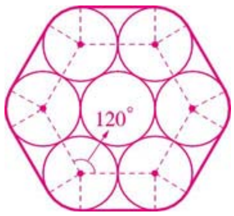
$\Rightarrow$ ① 得六段長度為 2（連心線之距離）及六個小圓弧

② 各圓心連接成一邊長為 2 的正六邊形（每一內角為 $120°$）

$\Rightarrow$ 每一個小圓弧所對應之角度為 $360°-2\times90°-120°=60°$

$\Rightarrow$ 此六個小圓弧恰可拼成一個半徑為 1 的圓$\Rightarrow$ 弧長為 2π

故外圍粗黑線條長為 $6\times2+1\times2\pi=12+2\pi$



圖（一）

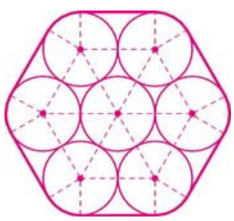
(2) 如圖（二）所示，面積包含一個正六邊形，六個矩形，與六個扇形

① 邊長為 2 的正六邊形面積＝6 個邊長為 2 的正三角形和$=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=6\sqrt{3}$

② 六個矩形面積為 $6\times1\times2=12$

③ 六個扇形面積＝一個半徑為 1 的圓面積$=\pi$

故圍成之面積為 $6\sqrt{3}+12+\pi$



圖（二）